Remise à niveau en mathématiques pour l'économie et la gestion

Étude de cas – Les fondamentaux – Théorie des ensembles

Ce cours vous est proposé par Jean-François Caulier, Maître de conférences, Paris-1Panthéon Sorbonne et par AUNEGe, l'Université Numérique en Économie Gestion.

Cet exercice est conçu pour tester la compréhension des opérations ensemblistes fondamentales, la capacité de synthèse des informations et la capacité à appliquer des concepts théoriques à des ensembles spécifiques.

Consignes

Considérez les ensembles suivants définis dans l'univers U des entiers naturels de 1 à 30 :

- A est l'ensemble des nombres pairs,

- B est l'ensemble des nombres multiples de 3,

- C est l'ensemble des nombres premiers.

Questions :

1. Listez les éléments de chacun des ensembles A, B, et C.
2. Déterminez et listez les éléments de l'intersection $A \cap B$ et expliquez ce que ces nombres représentent.
3. Trouvez l'union $B \cup C$ et listez ses éléments. Expliquez comment l'union de multiples de 3 et de nombres premiers est formée.
4. Calculez la différence $A - C$ et listez ses éléments. Quels types de nombres restent après avoir retiré les nombres premiers de l'ensemble des nombres pairs ?
5. Déterminez le complément de $A \cup B$ dans U, et listez les éléments de ce complément.
6. Utilisez le principe d'extensionnalité pour vérifier si $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$. Expliquez votre raisonnement.

Corrigé : éléments de réponse

1. $U = \{1, 2, 3, \dots, 30\}$; $A = \{0, 2, 4, 6, \dots\}$; $B = \{3, 6, 9, 12, 15, \dots\}$; $C = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}$

2. $A \cap B = \{6,12,18,24,30\}$, il s'agit des multiples de 6 compris entre 0 et 30.

3. Le seul élément commun est 3, tous les autres éléments n'apparaissent que dans un seul des deux ensembles. Ainsi, la réunion de B et de C comporte tous les éléments de B auxquels on ajoute ceux de C.

4. Le seul nombre premier pair est 2. La différence entre A et C est obtenue en enlevant l'élément 2 de l'ensemble A, ainsi que l'élément 0, si celui-ci est bien considéré comme pair (il n'y a pas forcément consensus sur ce dernier point).

5. $A \cup B = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 24, 26, 27, 28, 30\}$

   Le complément de $A \cup B$ dans U, noté $(A \cup B)^c$, contient tous les éléments de U qui ne sont ni pairs ni multiples de 3.

   $$(A \cup B)^c = \{1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 25, 29\}$$

   Le complément $(A \cup B)^c$ comprend les entiers de 1 à 30 qui ne sont ni pairs ni multiples de 3.

6. Nous devons vérifier si l'égalité $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$ est vraie.

   Analyse de $(A \cap B) \cup C$:

   - $A \cap B$ représente l'intersection des ensembles A et B, donc il contient les éléments qui sont à la fois pairs et multiples de 3 (i.e., multiples de 6). Les éléments de $A \cap B$ sont donc $\{6, 12, 18, 24, 30\}$.

   - $(A \cap B) \cup C$ est l'union de $A \cap B$ et C. Cela signifie que cet ensemble contient tous les éléments qui sont soit multiples de 6, soit des nombres premiers. Les éléments de C (nombres premiers jusqu'à 30) sont {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29}. En combinant ces deux ensembles, nous obtenons {2, 3, 5, 6, 7, 11, 12, 13, 17, 18, 19, 23, 24, 29, 30}.

   Analyse de $A \cap (B \cup C)$:

   - $B \cup C$ représente l'union des ensembles B et C, donc il contient tous les éléments qui sont soit multiples de 3, soit des nombres premiers. Les éléments de $B \cup C$ sont donc {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30}.

- $A \cap (B \cup C)$ est l'intersection de A (les nombres pairs) avec $B \cup C$. Cela signifie que cet ensemble contient tous les éléments qui sont à la fois pairs et qui sont soit multiples de 3, soit des nombres premiers. En filtrant les éléments pairs de $B \cup C$, nous obtenons {2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30}.

Conclusion

Les ensembles $(A \cap B) \cup C$ et $A \cap (B \cup C)$ ne sont pas égaux. Le premier contient des éléments qui sont des nombres premiers ou multiples de 6, tandis que le second contient des éléments qui sont à la fois pairs et aussi soit multiples de 3, soit premiers. L'égalité $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$ n'est donc pas vraie car les éléments présents dans ces ensembles diffèrent. Ce résultat démontre l'importance de l'ordre des opérations ensemblistes et de la façon dont les ensembles sont combinés.

Références

Comment citer ce cours ?

Remise à niveau en mathématiques pour l'économie et la gestion, Jean-François Caulier, AUNEGe (http://aunege.fr), CC – BY NC ND (http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/).