Remise à niveau en mathématiques pour l'économie et la gestion

Les fondamentaux – Théorie des ensembles

Ce cours vous est proposé par Jean-François Caulier, Maître de conférences, Université Paris 1 Panthéon Sorbonne et par AUNEGe, l'Université Numérique en Économie Gestion.

Table des matières

Préambule

Objectifs :

- Définir les concepts fondamentaux de la théorie des ensembles,
- Décrire les opérations possibles avec les ensembles.

Introduction

La théorie des ensembles est considérée comme fondamentale en mathématiques car elle offre un cadre et un langage communs pour presque toutes les branches de cette discipline. Elle permet de formaliser et de clarifier des notions qui peuvent sembler intuitives mais qui nécessitent une définition précise pour éviter les ambiguïtés et les paradoxes, comme l'infini ou la taille d'un ensemble. De plus, beaucoup de structures mathématiques complexes, telles que les groupes, les anneaux, les corps et les espaces vectoriels, sont définies en termes d'ensembles avec des structures supplémentaires ou des opérations. La manipulation des ensembles et de leurs propriétés est également cruciale pour formuler et prouver des théorèmes, comme le montrent les preuves importantes en analyse qui reposent sur des concepts d'ensembles ouverts, fermés et bornés. Enfin, les fondements de la logique moderne, essentiels pour la preuve des théorèmes et la formalisation des mathématiques, reposent largement sur la théorie des ensembles. Les notions d'appartenance, d'intersection, d'union, et de complément sont vitales pour exprimer des arguments logiques, rendant la théorie des ensembles indispensable pour une analyse rigoureuse et systématique dans divers domaines des mathématiques.

Définitions

La théorie des ensembles est une branche des mathématiques qui étudie les collections d'objets, appelées ensembles. Voici les concepts de base et la représentation associée :

Un ensemble est une collection d'objets distincts, chacun de ces objets étant considéré comme unique. Ces objets peuvent être n'importe quoi : nombres, personnes, autres ensembles, etc. Par exemple, l'ensemble des chiffres décimaux est un ensemble contenant les chiffres de 0 à 9.

Appartenance

L'appartenance est la relation entre un objet et un ensemble. Si un objet est membre d'un ensemble, on dit qu'il appartient à cet ensemble, souvent noté $x \in A$, où x est l'objet et A est l'ensemble. Lorsqu'un élément x spécifique n'appartient pas à un ensemble A, on le note $x \notin A$.

Égalité

Deux ensembles ne sont considérés comme égaux que s'ils possèdent exactement les mêmes éléments. On a donc $A = B$ si et seulement si tout élément de A appartient à B et que tout élément de B appartient aussi à A.

Descriptions d'un ensemble

On peut théoriquement décrire un ensemble de deux manières distinctes, en extension ou en compréhension.

La définition en extension d'un ensemble le spécifie en listant explicitement tous ses membres. Par exemple, l'ensemble des trois premiers nombres naturels peut être décrit en extension par $\{0,1,2\}$. Cette description n'est toutefois pas possible si l'ensemble présente un nombre infini d'éléments.

La définition en compréhension d'un ensemble le spécifie en utilisant une propriété que tous les membres doivent satisfaire, sans les lister explicitement. Par exemple, l'ensemble de tous les nombres pairs peut être décrit en compréhension par $\{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ } est\, pair\}$.

Représentation en Diagramme de Venn

Les ensembles peuvent être représentés visuellement à l'aide de diagrammes de Venn ou de Venn-Euler, où chaque ensemble est représenté par un cercle ou une autre forme, et les relations entre les ensembles (comme l'intersection et l'union qui seront définies dans la section suivante) sont représentées par des chevauchements entre ces formes. Voici un exemple simple de diagramme de Venn pour deux ensembles A et B :

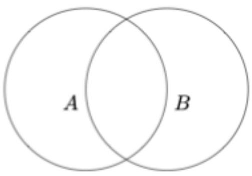

Figure 1 : diagramme de Venn

Ces bases de la théorie des ensembles vont nous permettre de manipuler des collections d'objets de manière logique, ce qui est au fondement des raisonnements en économie et gestion ou encore en analyse de données.

Opérations sur les ensembles

Cette partie présente une description des quatre opérations ensemblistes courantes : la réunion, l'intersection, la différence ensembliste, et le complément, accompagnées pour chaque opération d'une représentation visuelle.

Réunion

La réunion de deux ensembles A et B, notée $A \cup B$, est l'ensemble contenant tous les éléments qui appartiennent à A, à B, ou aux deux.

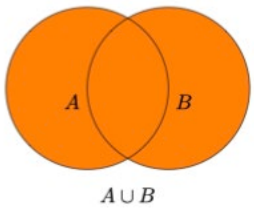

Figure 2 : réunion de deux ensembles

Intersection

L'intersection de deux ensembles A et B, notée $A \cap B$, est l'ensemble des éléments qui appartiennent à la fois à A et à B.

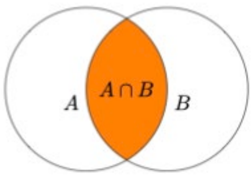

Figure 3 : intersection de deux ensembles

Différence ensembliste

La différence ensembliste de A par B, notée $A - B$ *ou* $A \setminus B$, est l'ensemble des éléments qui sont dans A mais pas dans B.

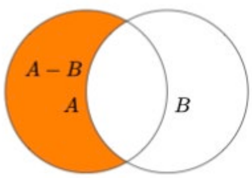

Figure 4 : différence ensembliste

Complément

Le complément d'un ensemble A, noté A^c, est l'ensemble des éléments qui appartiennent à U, l'ensemble de référence ou *univers,* et qui ne sont pas dans A.

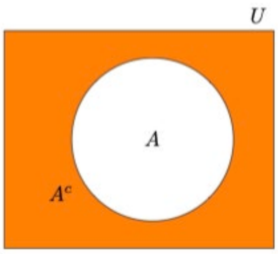

Figure 5 : complément d'un ensemble

Types d'ensembles

Parmi les différents types d'ensembles remarquables, quatre en particulier revêtent une importance cruciale dans l'étude de la théorie des ensembles : l'ensemble vide, les sous-ensembles, l'ensemble de toutes les parties d'un ensemble, et l'ensemble universel.

Ensemble Vide

L'ensemble vide est un ensemble qui ne contient aucun élément. Noté $\emptyset$, il est unique en ce sens qu'il est le seul ensemble dépourvu de membre. L'ensemble vide est un concept clé en théorie des ensembles car il sert de base pour la construction d'autres ensembles et il est utilisé dans de nombreuses preuves et définitions. Par exemple, l'intersection de deux ensembles disjoints est égale à l'ensemble vide.

Sous-ensemble

Un sous-ensemble d'un ensemble A est un ensemble composé d'éléments qui sont tous membres de A. Si B est un sous-ensemble de A, on note cela $B \subseteq A$. Tous les ensembles sont sous-ensembles d'eux-mêmes, et l'ensemble vide est un sous-ensemble de tout ensemble, ce qui en fait un cas particulier très utilisé en théorie des ensembles. L'étude des sous-ensembles permet de comprendre les relations entre différents ensembles et est essentielle pour explorer la structure des ensembles plus complexes.

Ensemble des Parties

L'ensemble des parties d'un ensemble A, noté $\wp(A)$, est l'ensemble contenant tous les sous-ensembles possibles de A, y compris l'ensemble vide et A lui-même. Par exemple, si $A = \{1,2\}$, alors $\wp(A) = \{\emptyset,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$. L'ensemble des parties d'un ensemble est un concept central en théorie des ensembles, car il montre comment à partir d'un ensemble donné, un nouvel ensemble, souvent de taille beaucoup plus grande, peut être construit.

Ensemble universel ou univers du discours

L'ensemble universel est un ensemble qui contient tous les objets considérés dans un contexte ou une théorie donnée. Il n'est pas fixe et dépend donc du contexte dans lequel il est utilisé. Par exemple, en théorie des ensembles, l'ensemble universel pourrait être l'ensemble de tous les nombres, de toutes les figures géométriques, ou de tout autre type d'objets mathématiques. L'ensemble universel est utile pour discuter des compléments d'ensembles, car le complément d'un ensemble A par rapport à l'ensemble universel U est l'ensemble de tous les éléments qui sont dans U mais pas dans A.

Ces ensembles particuliers jouent des rôles variés mais cruciaux en mathématiques, permettant de formuler et d'explorer des idées allant des plus élémentaires aux plus avancées en théorie des ensembles. Ils servent de pierres angulaires pour la construction de structures plus complexes et pour le développement de la logique mathématique.

Principes fondamentaux

Les deux principes fondamentaux de la théorie des ensembles, qui sous-tendent une grande partie de la logique mathématique et de la structuration des mathématiques modernes, sont le principe d'extensionnalité et le principe de compréhension des ensembles. Voici une explication de chacun de ces principes :

Principe d'Extensionnalité

Le principe d'extensionnalité stipule que deux ensembles sont égaux s'ils contiennent exactement les mêmes éléments. Cela signifie qu'il n'existe pas deux ensembles distincts ayant les mêmes membres. Formellement, cela peut être exprimé comme suit :

$$A = B \text{ } si\ et\ seulement\ si\ \forall x, (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$$

Ce principe permet de définir l'égalité des ensembles de manière précise et objective, sans ambiguïté quant à la composition des ensembles. Cela garantit également que chaque ensemble est uniquement déterminé par ses éléments, renforçant ainsi la notion que la composition d'un ensemble, et non d'autres propriétés ou caractéristiques, est ce qui définit un ensemble.

Principe de Compréhension des Ensembles (ou Axiome de Spécification)

Le principe de compréhension des ensembles, aussi appelé axiome de spécification, affirme qu'à partir de tout ensemble existant et de toute propriété bien définie, il est possible de former un ensemble composé uniquement des éléments de l'ensemble initial qui satisfont cette propriété. Formellement, pour tout ensemble A et toute propriété $P(x)$, il existe un ensemble B tel que :

$$B = \{x \in A \mid P(x)\}$$

Cet axiome permet de construire de nouveaux ensembles à partir d'ensembles existants en filtrant les éléments selon des critères spécifiques, sans avoir besoin de répertorier tous les éléments de l'ensemble résultant explicitement.

Ces deux principes sont essentiels pour la formalisation et la manipulation des ensembles en mathématiques, servant de base à la plupart des théories et des opérations ensemblistes dans divers domaines mathématiques. Ils permettent une compréhension cohérente et logique des ensembles, facilitant ainsi la structuration rigoureuse des concepts mathématiques.

Problèmes et paradoxe

La théorie des ensembles, bien qu'essentielle au développement des mathématiques modernes, a été confrontée à plusieurs problèmes et paradoxes notables depuis sa création par Georg Cantor à la fin du 19e siècle. Ces paradoxes ont joué un rôle crucial dans l'évolution de la théorie des ensembles et ont mené à des révisions significatives de ses fondements. Voici quelques-uns des plus célèbres :

Paradoxe de Russell

Le paradoxe de Russell, découvert par Bertrand Russell vers 1901, est l'un des paradoxes les plus célèbres et les plus influents dans le domaine de la logique et de la théorie des ensembles. Il remet en question l'idée de pouvoir former des ensembles simplement en utilisant une propriété définie. Le paradoxe est présenté sous la forme d'un ensemble qui contiendrait tous les ensembles qui ne se contiennent pas eux-mêmes. Si un tel ensemble existe, alors s'il se contient lui-même, il ne devrait pas se contenir, et s'il ne se contient pas, alors par définition, il devrait se contenir. Ce raisonnement circulaire montre l'incohérence inhérente à certains types de formations d'ensembles naïves.

Le paradoxe du barbier

Bertrand Russell a utilisé le paradoxe du barbier pour illustrer de manière intuitive le problème logique inhérent à certains types de définitions ensemblistes.

Le paradoxe du barbier est énoncé comme suit : dans un village, il y a un barbier qui rase tous ceux, et seulement ceux, qui ne se rasent pas eux-mêmes. La question est alors : le barbier se rase-t-il lui-même ? Si nous supposons qu'il se rase lui-même, alors, selon la règle qu'il rase seulement ceux qui ne se rasent pas eux-mêmes, il ne devrait pas se raser lui-même. Si nous supposons qu'il ne se rase pas lui-même, alors, selon la même règle, il devrait se raser lui-même. Ainsi, quelle que soit l'hypothèse que nous faisons, nous arrivons à une contradiction.

Le paradoxe de Russell généralise ce type de contradiction en théorie des ensembles. Il concerne l'ensemble de tous les ensembles qui ne se contiennent pas eux-mêmes comme membres. Si un tel ensemble existe, appelons-le R, alors si R se contient lui-même comme membre, il ne devrait pas se contenir en vertu de sa propre définition. D'un autre côté, si R ne se contient pas lui-même, alors par définition, il devrait se contenir. Ce raisonnement conduit à une contradiction similaire à celle illustrée par le paradoxe du barbier.

Paradoxe de Cantor

Le paradoxe de Cantor montre que l'ensemble de tous les ensembles ne peut pas exister dans la théorie des ensembles standard. Cantor a démontré que l'ensemble de toutes les sous-parties d'un ensemble donné (l'ensemble des parties) a toujours une cardinalité (taille) plus grande que l'ensemble lui-même. Si nous appliquons cela à l'ensemble de tous les ensembles, alors il devrait être plus grand que lui-même, ce qui est une contradiction.

Paradoxe de Burali-Forti

Le paradoxe de Burali-Forti découle de la tentative de considérer l'ensemble de tous les ordinaux (une généralisation des nombres naturels utilisée pour décrire des tailles d'ensembles infinis). Ce paradoxe montre qu'un tel "ensemble" d'ordinaux serait lui-même un ordinal plus grand que tous les autres, ce qui conduit à une contradiction, car il devrait alors se contenir lui-même comme un élément.

Réponses aux Paradoxes

Pour répondre à ces paradoxes, les mathématiciens ont développé des systèmes axiomatiques rigoureux pour la théorie des ensembles, le plus célèbre étant la théorie des ensembles de Zermelo-Fraenkel avec l'axiome du choix (ZFC). Ces systèmes évitent les constructions d'ensembles problématiques en utilisant des axiomes spécifiques qui limitent les façons dont les ensembles peuvent être formés. Ces restrictions empêchent la formation d'ensembles qui mèneraient à des paradoxes.

Ces reformulations de la théorie des ensembles ont permis de continuer à utiliser cette théorie comme fondement de presque toutes les mathématiques modernes, tout en évitant les contradictions et les problèmes exposés par ces paradoxes initiaux.

Conclusion

La théorie naïve des ensembles, malgré ses limitations et ses paradoxes, reste un outil fondamental en mathématiques. Elle introduit les concepts de base qui sont essentiels à l'analyse mathématique et à la logique. Pour un usage formel et sans contradiction, les mathématiciens se tournent vers des systèmes axiomatiques bien définis pour traiter des ensembles de manière rigoureuse.

Références

Comment citer ce cours ?

Remise à niveau en mathématiques pour l'économie et la gestion, Jean-François Caulier, AUNEGe (http://aunege.fr), CC – BY NC ND (http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/).

Table des illustrations