Remise à niveau en mathématiques pour l'économie et la gestion

Les fondamentaux – Ensembles de nombres

Ce cours vous est proposé par Jean-François Caulier, Maître de conférences, Université Paris 1 Panthéon Sorbonne et par AUNEGe, l'Université Numérique en Économie Gestion.

Table des matières

Préambule

Objectifs :

- Se rappeler des opérations arithmétiques fondamentales et l'ordre dans lequel les effectuer,
- Décrire les différents ensembles de nombres.

Introduction

Ce chapitre est dédié à l'exploration des fondations sur lesquelles reposent les mathématiques élémentaires et avancées. Nous débutons par les opérations de base : l'addition, la soustraction, la multiplication, et la division. Ces opérations formelles sont abordées dans le contexte des ensembles de nombres fondamentaux, à savoir les ensembles des nombres naturels $\mathbb{N}$, des entiers $\mathbb{Z}$, des rationnels $\mathbb{Q}$, et des réels $\mathbb{R}$. Chaque ensemble offre un terrain unique pour explorer ces opérations, illustrant des propriétés comme la commutativité, l'associativité, et la distributivité, ainsi que les identités particulières et les éléments inverses.

Parallèlement aux opérations numériques, nous étudions la théorie des ensembles, qui est la pierre angulaire de la logique mathématique et des structures algébriques. Cette théorie aide à comprendre et à formaliser les relations entre différents objets mathématiques, y compris les nombres eux-mêmes.

Les intervalles, qui sont des sous-ensembles cruciaux des nombres réels, sont examinés pour leur capacité à exprimer des plages de valeurs continues. Ces concepts sont essentiels non seulement pour l'analyse mathématique, mais aussi pour une application pratique en économie et gestion.

Nous aborderons également la valeur absolue, qui mesure la magnitude d'un nombre sans tenir compte de son signe, et les fractions, qui expriment les nombres rationnels comme le quotient de deux entiers. Ces concepts sont fondamentaux pour développer une compréhension flexible des nombres et pour manipuler des expressions algébriques complexes.

Enfin, les puissances, y compris les racines carrées et les exposants plus généraux, sont discutées. Leur maitrise est indispensable dans la manipulation des modèles rencontrés tant en économie qu'en gestion.

Cette section pose donc les bases nécessaires pour une exploration approfondie et une appréciation complète des structures mathématiques plus élaborées.

Les opérations de base

Les opérations fondamentales, souvent appelées opérations arithmétiques de base, sont les opérations élémentaires qui constituent les fondements des mathématiques. Ces opérations sont essentielles, car elles forment la base sur laquelle repose presque tout le calcul numérique et algébrique. Les quatre opérations fondamentales en mathématiques sont : l'addition, la soustraction, la multiplication, et la division. Voici une exploration détaillée de chacune de ces opérations.

L'addition

L'addition est le processus de mise en commun de deux nombres ou plus pour obtenir un total. Elle est symbolisée par le signe plus : + . Le résultat de l'addition de deux nombres est appelé la somme. L'addition présente plusieurs propriétés caractéristiques.

Propriétés

- Commutative : $a + b = b + a$
- Associative : $(a + b) + c = a + (b + c)$
- Élément neutre : $a + 0 = a$

Exemples :

- $7 + 8 = 15$
- $(1 + 2) + 3 = 1 + (2 + 3) = 6$
- $3 + 0 = 3$

La soustraction

La soustraction est l'opération qui consiste à retirer un nombre d'un autre pour déterminer la différence. Elle est représentée par le signe moins : « - ». Les propriétés clés de la soustraction sont reprises ci-dessous.

Propriétés

- Non commutative : $a - b \neq b - a$
- Non associative : $(a - b) - c \neq a - (b - c)$

Exemple :

- $10 - 4 = 6$

La multiplication

La multiplication est une forme d'addition répétée. Elle consiste à ajouter un nombre (le multiplicande) à lui-même plusieurs fois (le multiplicateur). Elle est exprimée par le signe fois « × » ou parfois par un point central. Le résultat d'une multiplication est appelé le produit. Les propriétés de la multiplication sont listées ci-après.

Propriétés

- Commutative : $a \times b = b \times a$
- Associative : $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$
- Élément neutre : $a \times 1 = a$
- Distributive par rapport à l'addition : $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$

Exemples :

- $6 \times 4 = 4 \times 6$
- $(6 \times 4) \times 5 = 6 \times (4 \times 5)$
- $3 \times 1 = 1 + 1 + 1 = 3$

La division

La division est l'opération inverse de la multiplication. Elle consiste à diviser un nombre (le dividende) par un autre nombre (le diviseur) pour obtenir un quotient et parfois un reste. Elle est symbolisée par le signe divisé par « ÷ » ou par « / ». Les aspects clés de la division sont repris ci-dessous.

Propriétés

- Non commutative : $a \div b \neq b \div a$ (sauf pour $b \neq 0$)
- Impossible de diviser par zéro : $a \div 0$ est indéfini

Exemple :

- $15 \div 3 = 5$
- $\frac{1/3}{2/3} = \frac{1}{3} \times \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$

Ordre des opérations

L'ordre dans lequel les opérations doivent être effectuées dans les expressions mathématiques est crucial pour garantir que tous les calculs produisent des résultats corrects et cohérents. Cet ordre est généralement abrégé par l'acronyme PEMDAS, qui représente :

- P (Parenthèses) : Commencez toujours par effectuer les opérations entre parenthèses ou entre crochets, de l'intérieur vers l'extérieur.
- E (Exposants) : Ensuite, résolvez les exposants (puissances et racines).
- MD (Multiplication et Division) : Ces opérations sont traitées comme équivalentes et sont effectuées de gauche à droite.
- AS (Addition et Soustraction) : Comme pour la multiplication et la division, ces opérations sont effectuées de gauche à droite.

Exemple :

Considérez l'expression $8 + 2 \times (2^2 - 2) \div 2$. Selon PEMDAS, nous procédons comme suit :

(a) Calcul des expressions entre parenthèses : $2^2 - 2 = 4 - 2 = 2$

(b) Application des exposants : déjà résolus dans l'étape précédente.

(c) Exécution des multiplications et divisions de gauche à droite : $2 \times 2 = 4$ puis $4 \div 2 = 2$

(d) Addition finale : $8 + 2 = 10$

Cet ordre garantit que tous les calculatrices et logiciels interprètent et résolvent les expressions de manière uniforme.

Les sections suivantes proposent un survol de la construction des principales familles de nombres, de leur simplicité initiale avec les nombres naturels jusqu'à la complexité des nombres réels, en passant par les entiers et les rationnels. L'ordre de présentation adopté est didactique plutôt qu'historique.

Les nombres naturels $\mathbb{N}$

Les nombres naturels sont les premiers nombres que l'on enseigne et sont utilisés pour compter des éléments. Ils forment l'ensemble noté $\mathbb{N}$, qui commence à zéro.

$$\mathbb{N} = \{0,1,2,3,4,\dots\}$$

On note $\mathbb{N}^*$ les naturels privés de l'élément 0 .

$$\mathbb{N}^* = \{1,2,3,4,\dots\}$$

Propriétés fondamentales

- Fermé pour l'addition et la multiplication : la composition de deux naturels par l'addition ou la multiplication donne un lieu à un autre entier naturel. Mathématiquement, si $a, b \in \mathbb{N}$, alors $a + b \in \mathbb{N}$ et $a \times b \in \mathbb{N}$.
- Infini : Il n'y a pas de plus grand nombre naturel; pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $n + 1$.
- Bien ordonné : L'ensemble des nombres naturels $\mathbb{N}$ est dit bien ordonné parce que chaque sous-ensemble non vide de $\mathbb{N}$ possède un plus petit élément. Cette propriété est fondamentale et est ce qui distingue l'ordre sur les nombres naturels de l'ordre sur d'autres ensembles numériques comme les nombres entiers, réels, ou rationnels.

Problème

Dans l'ensemble des nombres naturels $\mathbb{N}$, un problème fondamental est que la soustraction n'est pas toujours possible. Par exemple, l'opération $3 - 5$ n'est pas définie dans $\mathbb{N}$, car le résultat serait un nombre hors de cet ensemble. L'ensemble $\mathbb{Z}$ des nombres entiers résout ce problème en incluant à la fois les entiers positifs et négatifs, permettant ainsi de réaliser des soustractions entre n'importe quelles paires de nombres.

Les entiers $\mathbb{Z}$

Si vous avez 8 sous et que vous achetez un bien coûtant 10 sous, vous serez redevable de 2 sous au vendeur, vous présentez un solde négatif de -2 qui ne fait pas partie de l'ensemble des entiers naturels. Les nombres entiers étendent les nombres naturels pour inclure les nombres négatifs et fournissent une solution à l'équation $a + x = b$ pour tout $a, b \in \mathbb{Z}$.

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

Il existe plusieurs sous-ensembles des nombres entiers, désignés par des symboles spécifiques : $\mathbb{Z}^+$pour les entiers positifs, $\mathbb{Z}^-$pour les entiers négatifs, et $\mathbb{Z}^*$ pour l'ensemble des entiers non nuls. La définition de ces sous-ensembles est la suivante :

$$\mathbb{Z}^+ = \{1,2,3,4, \dots\} = \mathbb{N}^+$$
$$\mathbb{Z}^- = \{\dots, -4, -3, -2, -1\}$$
$$\mathbb{Z}^* = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

L'ensemble des nombres entiers $\mathbb{Z}$ possède trois propriétés importantes qui le caractérisent en termes algébriques.

Propriétés fondamentales

- Fermeture : $\mathbb{Z}$ est fermé sous les opérations d'addition, de soustraction et de multiplication. Cela signifie que l'addition, la soustraction ou la multiplication de deux entiers quelconques donne toujours un résultat qui est lui-même un entier. Cette propriété assure la cohérence interne des opérations arithmétiques au sein de cet ensemble.
- Non borné : L'ensemble $\mathbb{Z}$ n'est pas borné. Autrement dit, il n'existe pas de plus grand ou de plus petit entier. Pour tout entier, il est toujours possible de trouver un autre entier plus grand ou plus petit, ce qui montre que $\mathbb{Z}$ s'étend indéfiniment dans les deux directions positives et négatives.
- Inverse additif : Pour chaque entier n, il existe un entier $-n$ dans $\mathbb{Z}$ tel que $n + (-n) = 0$. Cela garantit que chaque élément a un opposé qui, lorsqu'ajouté à l'original, donne zéro, permettant la soustraction au sein de $\mathbb{Z}$.

Problème

La division dans l'ensemble des nombres entiers $\mathbb{Z}$ n'est pas toujours possible de manière à ce que le résultat reste un entier, ce qui reflète une non-fermeture de cette opération. Cette particularité influence fortement la résolution d'équations au sein de $\mathbb{Z}$.

Prenons un exemple pour illustrer ce point : lorsqu'on divise deux entiers, le résultat est un entier uniquement si le numérateur est un multiple exact du dénominateur. Ainsi, $6 \div 3 = 2$ est correct, mais $7 \div 2$ n'est pas acceptable dans $\mathbb{Z}$, car le résultat (3,5) n'est pas un entier. Ce problème de non-fermeture pose des défis pour résoudre des équations du type $ax = b$ dans $\mathbb{Z}$, où a et b sont des entiers. Si b n'est pas un multiple de a, l'équation n'a pas de solution dans $\mathbb{Z}$, ce qui limite les cas où des solutions entières sont possibles. Par exemple, l'équation $2x = 7$ n'a aucune solution dans $\mathbb{Z}$, car il n'existe aucun entier x tel que $2x$ donne 7 , soulignant ainsi les limitations de la division dans le cadre des entiers.

Les nombres rationnels $\mathbb{Q}$

Les gens se divisent en deux catégories : ceux qui voient leur verre à moitié vide et ceux qui le voient à moitié plein. Mais les deux ont besoin d'un nouvel ensemble pour désigner $1/2$ qui n'appartient ni à $\mathbb{N}$ ni à $\mathbb{Z}$. Les rationnels permettent les divisions (à l'exception de la division par zéro) et sont formés par les fractions de la forme $\frac{a}{b}$ où $a, b \in \mathbb{Z}$ et $b \neq 0$.

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\right\}$$

Il est possible de démontrer que les nombres rationnels incluent tous les nombres ayant une représentation décimale soit finie (comme 5 ou 0,25), soit périodique infinie (par exemple, 1, 232323...).

Des notations spécifiques sont également utilisées pour catégoriser certaines sous-ensembles de l'ensemble des nombres rationnels : $\mathbb{Q}^+$pour les rationnels positifs, $\mathbb{Q}^-$pour les rationnels négatifs, et $\mathbb{Q}^*$ pour les rationnels non nuls. Voici la définition de ces sous-ensembles :

$$\mathbb{Q}^+ = \left\{\frac{a}{b} \middle| \ a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^*, a \text{ et } b \text{ ayant le même signe } \right\}$$
$$\mathbb{Q}^- = \left\{\frac{a}{b} \middle| \ a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^*; a \text{ et } b \text{ ayant des signes opposés } \right\}$$
$$\mathbb{Q}^* = \left\{\frac{a}{b} \middle| \ a \in \mathbb{Z}^*, b \in \mathbb{Z}^*\right\}$$

Propriétés fondamentales

- Densité : Les nombres rationnels sont denses dans les réels, ce qui signifie que pour n'importe quelle paire de nombres réels, a et b où $a < b$, il existe toujours un nombre rationnel q tel que $a < q < b$. Cette propriété assure qu'il y a une infinité de nombres rationnels entre deux nombres quelconques.
- Fermé pour les opérations algébriques : L'ensemble des nombres rationnels est fermé sous les opérations d'addition, de soustraction, de multiplication, et de division (excepté la division par zéro). Cela signifie que le résultat de ces opérations entre deux nombres rationnels est toujours un nombre rationnel.
- Ordre total : Les nombres rationnels sont totalement ordonnés. Cela signifie que pour n'importe quelle paire de nombres rationnels, on peut toujours dire que l'un est soit plus grand, soit égal, soit plus petit que l'autre. Cette structure d'ordre permet de comparer tous les éléments de $\mathbb{Q}$ les uns aux autres, ce qui est essentiel pour beaucoup d'analyses mathématiques et pratiques.

Ces propriétés rendent les nombres rationnels particulièrement utiles en mathématiques, offrant des moyens pour approximer des nombres réels et pour effectuer des calculs dans de nombreux contextes.

Problème

Les nombres rationnels, définis comme le quotient de deux entiers a et b (avec $b \neq 0$), ne peuvent pas représenter les nombres irrationnels. Un nombre irrationnel est un nombre qui ne peut pas être exprimé sous la forme d'une fraction simple a/b, où a et b sont des entiers. Les irrationnels ont des expansions décimales qui sont non périodiques et infinies.

Deux exemples très courants sont :

- $\sqrt{2}$: C'est la racine carrée de 2 , qui ne peut pas être exprimée comme une fraction de deux entiers. Sa découverte est attribuée aux Pythagoriciens, qui ont montré que $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel en utilisant des méthodes de preuve par contradiction.
- π : Le rapport de la circonférence d'un cercle à son diamètre. Il est célèbre pour ses décimales non répétitives et infinies, et il est fondamental en géométrie et en analyse.

Les réels $\mathbb{R}$

Les nombres réels $\mathbb{R}$ représentent un ensemble complet qui inclut tous les nombres rationnels $\mathbb{Q}$, comme les entiers et les fractions, ainsi que les nombres irrationnels tels que π et $\sqrt{2}$. Ils sont essentiels pour une représentation continue et complète de la droite numérique. Voici trois propriétés fondamentales des nombres réels :

Propriétés fondamentales

- Fermeture pour les 4 opérations : L'ensemble des réels est fermé sous les opérations d'addition, de soustraction, de multiplication, et de division (excepté par zéro). Cela signifie que le résultat de ces opérations entre deux nombres réels est toujours un nombre réel.
- Continuité : L'ensemble des réels n'a pas de "trous", ce qui signifie qu'il comprend tous les points nécessaires pour une couverture continue de la droite numérique. Cette propriété est cruciale pour le calcul et la modélisation précise de phénomènes physiques, mais aussi économiques.
- Non dénombrable : $\mathbb{R}$ contient des sous-ensembles non dénombrables et est donc beaucoup plus grand que $\mathbb{Q}$ en termes de puissance (nombre d'éléments), ce qui donne une indication sur son nombre d'éléments constitutifs...

Problème

Un des problèmes notables avec l'ensemble des nombres réels ($\mathbb{R}$) est qu'il ne permet pas de résoudre toutes les équations algébriques, notamment l'équation $x^2 = -1$.

Dans l'ensemble des nombres réels, aucun nombre n'a la propriété que son carré donne un résultat négatif. Par définition, le carré de tout nombre réel est toujours positif ou nul. Par exemple, $(2)^2 = 4$ et $(-2)^2 = 4$, et même $(0)^2 = 0$. Il n'y a pas de nombre réel dont le carré est -1 ou tout autre nombre négatif.

Démonstration de l'existence de nombres irrationnels

Nous allons démontrer que la racine carrée de $2(\sqrt{2})$ est un nombre irrationnel prouvant ainsi l'existence d'au moins un nombre irrationnel. La démonstration utilise un argument classique par contradiction. Voici les étapes de cette démonstration :

Hypothèse initiale

Supposons, pour la contradiction, que $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel. Cela signifierait qu'il peut être écrit comme une fraction simplifiée $\frac{a}{b}$, où a et b sont des entiers sans facteur commun autre que 1 , et $b \neq 0$.

Équation de base

Si $\sqrt{2}$ est rationnel, alors nous avons :

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$$

En élevant les deux côtés au carré, nous obtenons :

$$2 = \frac{a^2}{b^2}$$

Ce qui implique que :

$$a^2 = 2b^2$$

Analyse de parité

Cette équation montre que a^2 est un multiple de 2, donc a^2 est pair. Si a^2 est pair, alors a doit également être pair (car le carré d'un nombre impair est impair). Supposons donc que $a = 2k$, où k est un entier.

Substitution dans l'équation

En substituant $2k$ pour a dans l'équation $a^2 = 2b^2$, nous obtenons :

$$(2k)^2 = 2b^2$$
$$4k^2 = 2b^2$$
$$2k^2 = b^2$$

Cette équation montre maintenant que b^2 est pair, ce qui signifie que b est également pair.

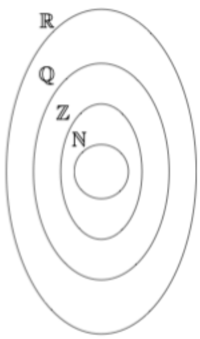
Contradiction

Si a et b sont tous deux pairs, cela contredit notre hypothèse initiale que $\frac{a}{b}$ est une fraction simplifiée (car ils auraient un facteur commun de 2). En conclusion, puisque l'hypothèse que $\sqrt{2}$ est rationnel conduit à une contradiction, nous devons conclure que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Conclusion

Les différents ensembles de nombres que nous avons traités dans cette section ont été construits progressivement pour répondre à une problématique non résolue par le précédent. Ainsi, le dernier

ensemble présenté, celui des réels, répond à tous les problèmes que nous avons cités à propos des ensembles précédents. Par conséquent, un entier naturel est un entier relatif, rationnel et est également un réel ; alors qu'un réel n'est pas forcément un rationnel ou relatif. Graphiquement, on peut représenter cette imbrication par le schéma suivant :



Références

Comment citer ce cours ?

Remise à niveau en mathématiques pour l'économie et la gestion, Jean-François Caulier, AUNEGe (http://aunege.fr), CC – BY NC ND (http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/).