Synthèse – Calcul d'un vecteur contrainte

On donne la matrice des contraintes dans une base xyz $[\sigma_{ij}] = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix}_{xyz}$

On retrouve dans cette matrice les vecteurs contrainte correspondant à des facettes orientées suivant les trois directions x y et z

$\overrightarrow{C_{(M,\vec{x})}}$ $\overrightarrow{C_{(M,\vec{y})}}$ $\overrightarrow{C_{(M,\vec{z})}}$

Calcul d'un vecteur contrainte

Pour le vecteur contrainte en M d'orientation $\vec{n}$:

$$\boxed{\overrightarrow{C_{(M,\vec{n})}} = [\sigma_{ij}].\{\vec{n}\}}$$

Exemple1 : pour la direction $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, *on retrouve* $\overrightarrow{C_{(M,\vec{x})}} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \end{pmatrix}$

Exemple2 : si $[\sigma] = \begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & -100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *pour la direction* $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$,

on trouve: $\overrightarrow{C_{(M,\vec{n})}} = \begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & -100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100/\sqrt{2} \\ -100/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$

Exemple3 : si $[\sigma] = \begin{pmatrix} 100 & 200 & 0 \\ 200 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 300 \end{pmatrix}$ *pour la direction* $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$,

on trouve: $\overrightarrow{C_{(M,\vec{n})}} = \begin{pmatrix} 100 & 200 & 0 \\ 200 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 300 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100/\sqrt{2} \\ 200/\sqrt{2} \\ 300/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

Exemple4 : si $[\sigma] = \begin{pmatrix} 100 & -200 & 0 \\ -200 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 300 \end{pmatrix}$ *pour la direction* $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$,

on trouve: $\overrightarrow{C_{(M,\vec{n})}} = \begin{pmatrix} 100 & -200 & 0 \\ -200 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 300 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100/\sqrt{3} - 200/\sqrt{3} \\ -200/\sqrt{3} \\ 300/\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -100/\sqrt{3} \\ -200/\sqrt{3} \\ 300/\sqrt{3} \end{pmatrix}$

Calcul des contraintes normale et tangentielle d'un vecteur contrainte

Pour le vecteur contrainte en M d'orientation $\vec{n}$:

$$\boxed{\overrightarrow{C_{(M,\vec{n})}} = \sigma_n.\vec{n} + \overrightarrow{\tau_n}}$$

Contrainte normale Contrainte tangentielle

La contrainte normale est un scalaire (il s'agit de la projection sur la normale $\vec{n}$)

La contrainte tangentielle est un vecteur. Il est dans le plan perpendiculaire à la normale $\vec{n}$ et on ne connaît donc pas sa direction à priori

Pour calculer la contrainte normale σ_n , on projette le vecteur contrainte sur la normale:

$$\boxed{\sigma_n = \overrightarrow{C_{(M,\vec{n})}}.\vec{n}}$$

Pour calculer la contrainte tangentielle $\overrightarrow{\tau_n}$, on effectue la différence entre le vecteur contrainte et sa partie "normale"

$$\boxed{\overrightarrow{\tau_n} = \overrightarrow{C_{(M,\vec{n})}} - \sigma_n.\vec{n}}$$

Exemple1 : pour la direction $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, *on retrouve bien* $\sigma_x = \begin{pmatrix}\sigma_x\\\tau_{xy}\\\tau_{xz}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{\tau_x} = \begin{pmatrix}\sigma_x\\\tau_{xy}\\\tau_{xz}\end{pmatrix} - \sigma_x\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\\tau_{xy}\\\tau_{xz}\end{pmatrix}$

Exemple2 : pour la direction $\vec{n} = \begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{C_{(M,\vec{n})}} = \begin{pmatrix}100/\sqrt{2}\\-100/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}$, *d'où* $\sigma_n = \begin{pmatrix}100/\sqrt{2}\\-100/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix} = 0$

la contrainte tagentielle vaut: $\overrightarrow{\tau_x} = \begin{pmatrix}100/\sqrt{2}\\-100/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix} - 0\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}100/\sqrt{2}\\-100/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}$

Exemple3 : pour la direction $\vec{n} = \begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\0\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{C_{(M,\vec{n})}} = \begin{pmatrix}100/\sqrt{2}\\200/\sqrt{2}\\300/\sqrt{2}\end{pmatrix}$, *d'où* $\sigma_n = \begin{pmatrix}100/\sqrt{2}\\200/\sqrt{2}\\300/\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\0\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix} = 200$

la contrainte tagentielle vaut: $\overrightarrow{\tau_x} = \begin{pmatrix}100/\sqrt{2}\\200/\sqrt{2}\\300/\sqrt{2}\end{pmatrix} - 200\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\0\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-100/\sqrt{2}\\200/\sqrt{2}\\100/\sqrt{2}\end{pmatrix}$

Exemple4 : pour la direction $\vec{n} = \begin{pmatrix}1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{C_{(M,\vec{n})}} = \begin{pmatrix}-100/\sqrt{3}\\-200/\sqrt{3}\\300/\sqrt{3}\end{pmatrix}$, *d'où* $\sigma_n = \begin{pmatrix}-100/\sqrt{3}\\-200/\sqrt{3}\\300/\sqrt{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\end{pmatrix} = 0$

la contrainte tagentielle vaut: $\overrightarrow{\tau_x} = \begin{pmatrix}-100/\sqrt{3}\\-200/\sqrt{3}\\300/\sqrt{3}\end{pmatrix} - 0\begin{pmatrix}1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-100/\sqrt{3}\\-200/\sqrt{3}\\300/\sqrt{3}\end{pmatrix}$