Corrigé examen 2017-2018

Exercice 1 :

- (E_1) $y' + 2y = x^2 - 2x + 3$.

On résout (E_1) sur $\underline{I = \mathbb{R}}$.

Equation homogène :

(E_h^1) $y_h' + 2y_h = 0$

La sol. générale de (E_h^1) est $\underline{y_h = Ce^{-2x}}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ où C = cte arbitraire.

Solution particulière :

Le 2nd membre $x^2 - 2x + 3$ est de la forme $e^{\lambda x} P_2(x)$ avec $\lambda = 0$ et $P_2(x) = x^2 - 2x + 3$. On cherche alors y_0 sous la forme :

$$y_0(x) = e^{\lambda x} Q_2(x) \quad \text{où } Q_2 = \text{polynôme de degré } 2$$
$$= ax^2 + bx + c.$$

Alors $y_0'(x) = 2ax + b$ que l'on injecte dans (E_1) :

$$2ax + b + 2(ax^2 + bx + c) = x^2 - 2x + 3$$

$$\Leftrightarrow 2ax^2 + 2(a+b)x + b + 2c = x^2 - 2x + 3$$

Par identification : $\begin{cases} 2a = 1 \\ 2(a+b) = -2 \\ b + 2c = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = \frac{-3}{2} \\ c = \frac{9}{4} \end{cases}$

Donc $\underline{y_0(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Bilan : La sol. générale de (E_1) est $\boxed{y(x) = Ce^{-2x} + \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}, \forall x \in \mathbb{R} \text{ où } C = \text{cte arbitraire}}$

• $(E_2)\ \frac{1}{\ln(x)} y' - y = 1$.

Ici, $a(x) = \frac{1}{\ln(x)}$ est défini (continue) et non nul $\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$.

On résout donc sur $\underline{I =]0,1[\cup]1,+\infty[}$.

<u>Equation homogène:</u>

$(E_h^2)\ \frac{1}{\ln(x)} y_h' - y = 0$.

Ici, $\frac{-b(x)}{a(x)} = \ln(x)$ donc $u(x) = x\ln(x) - x$, $\forall x \in I$.

La sol.$^{\underline{on}}$ générale de (E_h^2) est donc $\underline{y_h(x) = Ce^{x\ln(x)-x}}$, $\forall x \in I$, où C = cte arbitraire,

(y_h peut aussi s'écrire $y_h(x) = Cx^x e^{-x}$).

<u>Solution particulière:</u>

$\underline{y_0(x) = -1}$ est sol.$^{\underline{on}}$ évidente.

<u>Solution générale:</u>

La sol.$^{\underline{on}}$ générale de (E_2) s'écrit donc :

$$\boxed{y(x) = Ce^{x(\ln(x)-1)} - 1,\ \forall x \in]0,1[\cup]1,+\infty[,\ \text{où } C = \text{cte arbitraire}}$$

ou de manière plus générale $\boxed{y(x) = \begin{cases} C_1 e^{x(\ln(x)-1)} - 1, & \forall x \in]0,1[\\ C_2 e^{x(\ln(x)-1)} - 1, & \forall x \in]1,+\infty[\end{cases}}$

Mais on peut remarquer que y est <u>continue en $x = 1$</u>, et qu'elle est <u>prolongeable par continuité en $x = 0$</u> en posant $y(0) = C - 1$. On peut donc écrire au final :

$$\boxed{y(x) = \begin{cases} Ce^{x\ln(x)-x} - 1, & \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \\ C - 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}}$$

• (E_3) $xy' - 2y = x^2$

Ici, $a(x) = x$ donc on résout sur $\underline{I = \mathbb{R}^*}$.

<u>Equation homogène :</u>

(E_h^3) $x y_h' - 2y_h = x^2$.

Ici, $\dfrac{-b(x)}{a(x)} = \dfrac{2}{x}$ donc $u(x) = 2\ln(|x|) = \ln(x^2)$, $\forall x \in I$.

Donc $\underline{y_h(x) = Cx^2}$, $\forall x \in I$, où C = cte arbitraire.

<u>Solution particulière :</u>

• Variation de la constante : on cherche y_0 sous la forme $y_0(x) = C(x)x^2$, $\forall x \in I$.

Alors $y_0'(x) = C'(x)x^2 + 2C(x)x$, que l'on injecte dans (E_3) :

$$C'(x)x^3 + 2C(x)x^2 - 2C(x)x^2 = x^2$$

$$\Leftrightarrow \quad C'(x) = \frac{1}{x}$$

D'où $C(x) = \ln(|x|)$, $\forall x \in \mathbb{R}^*$.

On obtient donc $\underline{y_0(x) = \ln(|x|)x^2}$, $\forall x \in I$.

<u>Solution générale</u>

La solution générale de (E_3) s'écrit donc :

$$\boxed{y(x) = \begin{cases} (C_1 + \ln(|x|))x^2, & \forall x \in]-\infty, 0[\\ (C_2 + \ln(|x|))x^2, & \forall x \in]0, +\infty[\end{cases}, \text{ où } C_1, C_2 = \text{ctes arbitraires}}$$

<u>N.B. :</u> On peut prolonger y par continuité en 0 en posant $y(0) = 0$, et on obtient alors :

$$\boxed{y(x) = \begin{cases} (C_1 + \ln(|x|))x^2, & \forall x \in \mathbb{R}_-^*, \\ (C_2 + \ln(|x|))x^2, & \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \\ 0 & \text{en } x = 0. \end{cases}}$$

• (E_4) $2y' - y = \cos(x) + \sin(x)$

On résout sur $\underline{I = \mathbb{R}}$ car $x \mapsto \cos(x)$ et $x \mapsto \sin(x)$ sont continues sur $\mathbb{R}$.

<u>Equation homogène :</u>

(E_4^h) $2y_h' - y_h = 0$

On a $\frac{-b}{a} = \frac{1}{2}$, donc $u(x) = \frac{1}{2}x$.

D'où $\underline{y_h(x) = Ce^{\frac{x}{2}}}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, où $C = c.r.a.$

<u>Solution particulière :</u>

On cherche y_0 sous la forme $y_0(x) = \alpha\cos(x) + \beta\sin(x)$.
Alors $y_0'(x) = -\alpha\sin(x) + \beta\cos(x)$, et en injectant dans (E_4), on obtient :

$$(2\beta - \alpha)\cos(x) + (-2\alpha - \beta)\sin(x) = \cos(x) + \sin(x)$$

Par identification, on obtient $\begin{cases} 2\beta - \alpha = 1 \\ -2\alpha - \beta = 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2\beta - 1 \\ -5\beta = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{-3}{5} \\ \beta = \frac{1}{5} \end{cases}$$

Donc $\underline{y_0(x) = \frac{-3}{5}\cos(x) + \frac{1}{5}\sin(x)}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

<u>Solution générale :</u>

Les solutions de (E_4) s'écrivent donc :

$$\boxed{y(x) = Ce^{\frac{x}{2}} - \frac{3}{5}\cos(x) + \frac{1}{5}\sin(x),\ \forall x \in \mathbb{R},\ \text{où } C = c.r.a.}$$

Exercice 2 :

(E_5) $y'' + 2y' + 5y = 1$.

On résout sur $I = \mathbb{R}$.

Equation homogène :

(E_5^h) $y_h'' + 2y_h' + 5y_h = 0$.

Equation caractéristique : $r^2 + 2r + 5 = 0$.

Solutions : $r = -1 \pm 2i$ (solutions complexes).

Donc $\underline{y_h(x) = e^{-x}\left(A\cos(2x) + B\sin(2x)\right)}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, où $A, B =$ des arbitraires.

Solution particulière :

$y_0(x) = \frac{1}{5}$ est sol.^{on} évidente.

Solution générale :

L'ensemble des solutions de (E_5) s'écrivent donc

$$\boxed{y(x) = e^{-x}\left(A\cos(2x) + B\sin(2x)\right) + \frac{1}{5},\ \forall x \in \mathbb{R},\ \text{où } A, B = \text{des arbitraires}}$$

• (E_6) $y'' - 3y' + 2y = e^x$

On résout sur $I = \mathbb{R}$.

<u>Equation homogène:</u>

(E_6^h) $y_h'' - 3y_h' + 2y_h = 0$

Equation caractéristique:

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \iff x = 1 \text{ ou } x = 2.$$

Donc $\underline{y_h(x) = Ae^x + Be^{2x}}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, où A, B = ctes arbitraires

<u>Solution particulière:</u> (EDO à coeffs constants)

Ici, $f(x) = e^x$ est de la forme $e^{\lambda x} P_0(x)$ avec $\left| \begin{array}{l} \lambda = 1 \\ P_0(x) = 1. \end{array} \right.$

D'après le cours, il faut alors chercher y_0 sous la forme:

$$y_0(x) = \alpha x e^x \text{ où } \alpha \in \mathbb{R}.$$

En injectant dans (E_6), on obtient:

$$\alpha(x+2)e^x - 3\alpha(x+1)e^x + 2\alpha x e^x = e^x, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\iff -\alpha e^x = e^x, \ \forall x \in \mathbb{R} \iff \alpha = -1.$$

Donc $\underline{y_0(x) = -xe^x}$.

<u>Solution générale:</u>

Les solutions de (E_6) s'écrivent donc:

$$\boxed{y(x) = (A - x)e^x + Be^{2x}, \ \forall x \in \mathbb{R}, \text{ où } A, B = \text{ctes arbitraires.}}$$

• $(E_7)\begin{cases} x^2y''-xy'+y=0, \\ y(1)=0,\ y'(1)=1. \end{cases}$

C'est un <u>problème de Cauchy homogène</u>, que l'on résout sur <u>$I=\mathbb{R}^*$</u>.

<u>Solution particulière/évidente:</u>

On commence par chercher une première solution évidente y_1, ou tout du moins facile à déterminer.

Ici, a, b et c sont des polynômes du 2nd degré, on peut donc essayer de chercher y_1 sous la forme:

$$y_1(x)=ax^2+bx+c.$$

On injecte dans (E_7) pour obtenir:

$$2ax^2-x(2ax+b)+ax^2+bx+c=0,\ \forall x\in\mathbb{R}^*$$

$$\Leftrightarrow\quad ax^2+c=0,\ \forall x\in\mathbb{R}^*.$$

$$\Leftrightarrow\quad a=0, c=0 \text{ et } b \text{ quelconque } \in\mathbb{R}.$$

Donc $\underline{y_1(x)=Cx}$, $\forall x\in\mathbb{R}$, où $C=$cte arbitraire.

<u>Solution linéairement indépendante:</u>

On cherche maintenant une solution y_2 linéairement indép. de y_1.

Variation de la constante: on cherche y_2 sous la forme:

$$y_2(x)=C(x)x.$$

On obtient alors en injectant dans (E_7):

$$x^3C''(x)+x^2C'(x)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}^* \Leftrightarrow \frac{C''(x)}{C'(x)}=\frac{-1}{x},\ \forall x\in\mathbb{R}^*$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \ln(|C'(x)|)=+\ln\left(\frac{\alpha}{|x|}\right) \\ \forall x\in\mathbb{R}^* \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} |C'(x)|=\frac{\alpha}{|x|} \\ \forall x\in\mathbb{R}^* \end{vmatrix} \Leftrightarrow C'(x)=\begin{cases} \frac{d_1}{x}, \forall x\in\mathbb{R}^*_- \\ \frac{d_2}{x}, \forall x\in\mathbb{R}^*_+ \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow C(x)=\begin{cases} d_1\ln(|x|), \forall x\in\mathbb{R}^*_- \\ d_2\ln(|x|), \forall x\in\mathbb{R}^*_+ \end{cases} \text{ ou bien plus simplement } C(x)=\alpha\ln(|x|), \forall x\in\mathbb{R}^*.$$

Donc $\underline{y_2(x)=\alpha x\ln(|x|)}$, $\forall x\in\mathbb{R}^*$, où $\alpha=$ cte arbitraire

<u>Solution du pb de Cauchy:</u>

La solution générale de l'EDO est $y(x)=\alpha x+\beta x\ln(|x|)$, $\forall x\in\mathbb{R}^*$.

Donc $\begin{cases} y(1)=0 \\ y'(1)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=0 \\ \beta=1 \end{cases}$, d'où $\boxed{y(x)=x\ln(|x|),\ \forall x\in\mathbb{R}^*.}$

(prolongeable par continuité en $x=0$ avec $y(0)=0$)

Exercice 3 :

$$(E_8)\ \begin{cases} x'(t) = -4x(t) + 2y(t) + 1 \\ y'(t) = 3x(t) + y(t) - 1 \\ x(0) = 0,\ y(0) = 0. \end{cases}$$

C'est un pb de Cauchy associé à un système différentiel linéaire d'ordre 1, que l'on peut mettre sous la forme :

$$X'(t) = A\,X(t) + F \text{ avec } A = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \text{ et } F = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

① Valeurs propres et vecteurs propres de A :

- $P_\lambda(A) = \begin{vmatrix} -4-\lambda & 2 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 3\lambda - 10 = (\lambda+5)(\lambda-2)$.

  Les valeurs propres de A sont donc $\lambda_1 = -5$ et $\lambda_2 = 2$, donc A est diagonalisable (2 vp simples).

- Vecteur propre v_1 associé à $\lambda_1 = -5$:

  $A - \lambda_1 I_2 = A + 5I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

  On voit que $2C_1 - C_2 = 0_{\mathbb{R}^2}$, donc $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

- Vecteur propre v_2 associé à $\lambda_2 = 2$:

  $A - \lambda_2 I_2 = A - 2I_2 = \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

  On voit que $C_1 + 3C_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, donc $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

② Solution générale du système homogène :

Donc $X(t) = \alpha e^{-5t}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Soit $\begin{cases} x(t) = 2\alpha e^{-5t} + \beta e^{2t} \\ y(t) = -\alpha e^{-5t} + 3\beta e^{2t} \end{cases}$, $\forall t \in \mathbb{R}$, où α, β = cstes arbitraires.

③ <u>Solution particulière :</u>

On cherche une solution X_0 <u>constante</u>, on a alors :

$$AX_0 + F = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow X_0 = -A^{-1}F \quad \text{(A est bien inversible puisque } \det(A) = -10 \neq 0\text{).}$$

Or $A^{-1} = \dfrac{-1}{10}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$, donc $X_0 = \dfrac{+1}{10}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} +1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Soit $\underline{X_0 = \begin{pmatrix} 3/10 \\ 1/10 \end{pmatrix}}$.

④ <u>Solution générale et solution du pb de Cauchy :</u>

La solution générale du système est donc :

$$\boxed{\begin{cases} x(t) = 2\alpha e^{-5t} + \beta e^{2t} + \dfrac{3}{10} \\ y(t) = -\alpha e^{-5t} + 3\beta e^{2t} + \dfrac{1}{10} \end{cases}, \forall t \in \mathbb{R}}$$

Mais $\begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha + \beta = \dfrac{-3}{10} \\ -\alpha + 3\beta = \dfrac{-1}{10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{-4}{35} \\ \beta = \dfrac{-5}{70} = \dfrac{-1}{14} \end{cases}$

Donc
$$\boxed{\begin{cases} x(t) = \dfrac{-8}{35} e^{-5t} - \dfrac{1}{14} e^{2t} + \dfrac{3}{10} \\ y(t) = \dfrac{4}{35} e^{-5t} + \dfrac{3}{14} e^{2t} + \dfrac{1}{10} \end{cases}, \forall t \in \mathbb{R}}$$

Exercice 4 :

1) $y_h(x) = \dfrac{C}{1+x^2}$, donc y_h est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Alors $\boxed{y_h'(x) = \dfrac{-2Cx}{(1+x^2)^2},\ \forall x \in \mathbb{R}.}$

On remarque alors que :

$$(E_h)\quad \boxed{(1+x^2)\, y_h'(x) + 2x\, y_h(x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}.}$$

(i.e. $\underline{a(x) = 1+x^2}$ et $\underline{b(x) = 2x}$).

2) Soit $x \in \mathbb{R}$: (y est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ comme y_h)

$$a(x)\big(y'(x) - y_h'(x)\big) = (1+x^2)\left[\frac{1-2Cx-x^2}{(1+x^2)^2} + \frac{2Cx}{(1+x^2)^2}\right]$$

$$= \frac{1-x^2}{1+x^2},$$

$$b(x)\big(y(x) - y_h(x)\big) = \frac{2x^2}{1+x^2}.$$

Donc $\boxed{a(x)\big(y'(x) - y_h'(x)\big) + b(x)\big(y(x) - y_h(x)\big) = 1,\ \forall x \in \mathbb{R}.}$

Or on a vu que $a(x)\, y_h'(x) + b(x)\, y_h(x) = 0$ au 1).

D'où $a(x)\, y'(x) + b(x)\, y(x) = 1,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

On obtient ainsi que toutes les fonctions y sont solutions de l'EDO :

$$(E)\quad \boxed{(1+x^2)\, y'(x) + 2x\, y(x) = 1}$$

Vérifions que ce sont les <u>seules</u> solutions de cette EDO : toutes les solutions de (E) s'écrivent $y(x) = y_h(x) + y_0(x)$ où y_h est la solution générale de l'EDO homogène associée (qui est (E_h), cf 1)) et y_0 une solution particulière. On retrouve bien la forme des fonctions y et les calculs précédents nous assurent ainsi que <u>toutes</u> les sol.^{ons} de (E) sont les fonctions y.

Exercice 5 :

Plusieurs méthodes étaient possibles : utilisation d'un système différentiel linéaire d'ordre 1, équation caractéristique "étendue" (en cherchant les solutions sous la forme $y(t) = e^{xt}$), ou bien encore par intégration successives (ou changement d'inconnues, ce qui revient au même). Cette dernière méthode est de loin la plus simple, donc utilisons la.

Le problème (E_g) est un problème de Cauchy (donc solution unique) que l'on résout sur $\underline{I = \mathbb{R}}$.

Partons de l'EDO $y''' = 3$ et intégrons la entre 0 et t :

$$\int_0^t y'''(s)\,ds = \int_0^t 3\,ds$$

$$\Leftrightarrow \left[y''(s)\right]_0^t = \left[3s\right]_0^t$$

$$\Leftrightarrow y''(t) - y''(0) = 3t$$

$$\Leftrightarrow y''(t) = 3t + 1 \quad \text{car } y''(0) = 1.$$

Intégrons à nouveau entre 0 et t :

$$\int_0^t y''(s)\,ds = \int_0^t (3s+1)\,ds$$

$$\Leftrightarrow \left[y'(s)\right]_0^t = \left[\frac{3}{2}s^2 + s\right]_0^t$$

$$\Leftrightarrow y'(t) - y'(0) = \frac{3}{2}t^2 + t$$

$$\Leftrightarrow y'(t) = \frac{3}{2}t^2 + t \quad \text{car } y'(0) = 0.$$

Il ne reste plus qu'à intégrer une dernière fois entre 0 et t :

$$\int_0^t y'(s)\,ds = \int_0^t \left(\frac{3}{2}s^2+s\right)ds$$

$$\Leftrightarrow \left[y(s)\right]_0^t = \left[\frac{1}{2}s^3+\frac{s^2}{2}\right]_0^t$$

$$\Leftrightarrow y(t)-y(0) = \frac{1}{2}t^3+\frac{1}{2}t^2$$

$$\Leftrightarrow y(t) = \frac{1}{2}t^3+\frac{1}{2}t^2 \text{ car } y(0)=0.$$

Donc $\boxed{y(t) = \frac{1}{2}t^3+\frac{1}{2}t^2,\ \forall t\in\mathbb{R}.}$

Autre méthode équivalente : posons $z(t) = y'(t)$.

Alors $y''' = 3 \Leftrightarrow z'' = 3$ qui est une EDO d'ordre 2 (à coeffs constants)

Equation caractéristique associée à l'équation homogène ($z_h'' = 0$) :

$$r^2 = 0 \Leftrightarrow r = 0 \text{ racine double}$$

Donc $z_h(t) = (\alpha t+\beta)e^{0.t} = \alpha t+\beta,\ \forall t\in\mathbb{R}$.

Solution particulière : le second membre est de la forme $P_0(t)e^{\lambda t}$ avec $P_0(t) = 3$ et $\lambda = 0$ qui est la racine double de l'équation caractéristique. Donc on cherche z_0 sous la forme $z_0(t) = t^2 Q_0(t)$ où $Q_0(t) = \alpha$. $(\deg(Q_0) = 0)$

On trouve : $z_0(t) = \frac{3}{2}t^2$.

Donc $z(t) = \alpha t+\beta+\frac{3}{2}t^2$.

Or $\begin{cases} z(0) = y'(0) = 0 \\ z'(0) = y''(0) = 1 \end{cases}$, donc $\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 0 \end{cases}$, d'où $z(t) = t+\frac{3}{2}t^2$, $\forall t\in\mathbb{R}$.

Il ne reste plus qu'à résoudre $y'(t) = t+\frac{3}{2}t^2$, et on retombe sur le même résultat en utilisant $y(0) = 0$.