INSA Toulouse
Section IFCI

Année 2017-2018
Cycle Préparatoire

Examen d'Équations Différentielles Ordinaires

Calculatrices et documents autorisés.

Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1. EDO d'ordre 1. *(6 points)*

Chercher les solutions réelles des équations suivantes et préciser leur domaine de définition.

(E_1) $y' + 2y = x^2 - 2x + 3$.

(E_2) $\frac{1}{\ln x} y' - y = 1$.

(E_3) $xy' - 2y = x^2$.

(E_4) $2y' - y = \cos(x) + \sin(x)$.

Exercice 2. EDO d'ordre 2. *(6 points)*

Chercher les solutions réelles des équations suivantes et préciser leur domaine de définition.

(E_5) $y'' + 2y' + 5y = 1$.

(E_6) $y'' - 3y' + 2y = e^x$.

$$(E_7) \quad \left\{ \begin{array}{l} x^2 y'' - xy' + y = 0\,, \\ y(1) = 0\,, \quad y'(1) = 1\,. \end{array} \right. .$$

Exercice 3. Système différentiel. *(4 points)*

Résoudre le système différentiel suivant :

$$(E_8) \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x'(t) & = & -4x(t) + 2y(t) + 1\,, \\ y'(t) & = & 3x(t) + y(t) - 1\,, \end{array} \right. \qquad \text{avec} \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} x(0) & = & 0\,, \\ y(0) & = & 0\,. \end{array} \right.$$

Exercice 4. A la recherche de l'EDO. *(3 points)*

On cherche ici à déterminer une EDO du premier ordre dont toutes les solutions sont les fonctions y de la forme :

$$y(x) = \frac{C + x}{1 + x^2}\,,$$

où C est une constante réelle arbitraire. On pose $y_h(x) = \dfrac{C}{1 + x^2}$.

1. Calculer la dérivée première de $y_h(x)$ puis proposer des coefficients $a(x)$ et $b(x)$ tels que :

$$a(x)y_h'(x) + b(x)y_h(x) = 0\,.$$

2. Calculer $a(x)(y'(x) - y_h'(x)) + b(x)(y(x) - y_h(x))$ et en déduire une EDO dont toutes les solutions sont les fonctions y données en début d'exercice.

Exercice 5. EDO d'ordre supérieur. *(3 points)*

A l'aide de la méthode de votre choix, résoudre le problème différentiel suivant :

$$(E_9) \quad \begin{cases} y''' = 3\,, \\ y(0) = 0\,, \\ y'(0) = 0\,, \\ y''(0) = 1\,. \end{cases}$$

$\mathcal{FIN}$