INSA Toulouse
Section IFCI

Cycle Préparatoire
Année 2016-2017

Examen final d'Équations Différentielles Ordinaires

Calculatrices et documents autorisés

Le barème est donné à titre indicatif.

Durée : 2h.

Exercice 1. EDO d'ordre 1. *(6 points)*

Chercher les solutions réelles des équations suivantes et préciser leur domaine de définition.

(E_1) $y' + y = e^{-x}$.

(E_2) $x^2 y' + (1-2x)\, y = 2x - 1$.

(E_3) $y' + 2xy = e^{-x^2} \cos x$.

(E_4) $y' + \dfrac{1}{x}\, y = \dfrac{1}{x}$.

Exercice 2. EDO d'ordre 2. *(6 points)*

Chercher les solutions réelles des équations suivantes et préciser leur domaine de définition.

(E_5) $x'' - x = 5t + 2$.

$$(E_6) \quad \left\{ \begin{array}{l} y'' + 6y' + 5y = e^{-5t}\,, \\ y(0) = 0\,, \quad y'(0) = 1\,. \end{array} \right. .$$

(E_7) $x^2 y'' + xy' - 4y = 1$.

Exercice 3. Système différentiel. *(4 points)*

Résoudre le système différentiel suivant :

$$(E_8) \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x'(t) & = & -5x(t) - 2y(t) + 3 \\ y'(t) & = & 4x(t) - 11y(t) - 1 \end{array} \right. \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x(0) & = & 1, \\ y(0) & = & -1 \end{array} \right.$$

Exercice 4. Une EDO d'ordre 3 pour la route. *(4 points)*

Soit le problème de Cauchy suivant :

$$(E_8) \qquad \begin{cases} y'''(x) - y'(x) = 0\,, \\ y(0) = 1\,, \\ y'(0) = 0\,, \\ y''(0) = 2\,. \end{cases}$$

Résoudre ce problème d'au moins deux manières différentes.

Exercice 5. Population de tortues *(4 points)*

Des scientiques ont observé que la polulation des tortues des îles Galapagos obéissait à l'EDO :

$$y'(t) = ay(t) - by^2(t)\ , \tag{1}$$

où y représente le nombre de tortues par hectare, t le temps, et a, b des constantes biologiques liées aux tortues.
Cette EDO est non-linéaire et ne peut donc pas être résolue par les méthodes habituelles. Elle fait néanmoins partie d'une classe d'équations appelées équations de Bernoulli, que l'on sait résoudre par changement de variable.

1. Posons $z(t) = \dfrac{1}{y(t)}$. Montrer alors que l'EDO vérifiée par la fonction z est :

$$z'(t) = -az(t) + b\,.$$

2. Résoudre l'EDO précédente et en déduire l'expression générale de la solution y de (**??**).
3. Comment se comporte cette solution y lorsque t tend vers $+\infty$?
4. En déduire une possible interprétation biologique des constantes a et b de l'équation.

$\mathcal{FIN}$