Feuille d'exercices n°1

Exercice 1 (**EDO linéaires d'ordre 1**)

Résoudre les EDO suivantes et précisez le domaine de définition de leurs solutions :

(1) $y' + 3y = 3x^2 + 11x$.

(2) $y' + 3y = \sin x$,

(3) $y' + 3y = 2\sin x + 3x^2 + 11x$,

(4) $y' - y = xe^x$,

(5) $xy' + y = x^2 + e^x$,

(6) $(x^2+1)y' - xy = 0$,

(7) $(x^2+3x+2)y' - y = (x+1)^2\cos(x)$,

(8) $x(x-1)y'(x) + (x-n-1)y(x) = 0$,

Exercice 2 (**EDO linéaires d'ordre 2**)

Résoudre les EDO suivantes et précisez les domaines de définition de leurs solutions :

(9) $y'' - 2y' + y = 6xe^x$,

(10) $y'' - 2y' + 2y = 2$, avec comme conditions initiales: $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$,

(11) $x^2y''(x) - 2y(x) = x^3$,

(12) $t^2y'' + ty' - y = t^2$,

Exercice 3

Calculer une primitive de $x \mapsto \ln x$, et résoudre l'équation différentielle:

$$y'' - \ln(x)y' - \frac{1}{x}y = 0 \qquad (13)$$

Exercice 4

Trouver toutes les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ pour lesquelles le problème:

$$\begin{cases} y''(t) + \alpha y(t) = 0 \\ y(0) = 0,\ y(1) = 0 \end{cases} \qquad (14)$$

admet une solution $y : [0,1] \to \mathbb{R}$ non identiquement nulle.

Exercice 5

Pour $x \in \mathbb{R}^{+*}$, trouver les solutions réelles de l'équation différentielle suivante:

$$(15) \quad x^2 y'' + xy' + y = 0$$

Indication : chercher y sous la forme x^α avec $\alpha \in \mathbb{C}$ et écrire les solutions complexes. Décomposer en partie réelle et partie imaginaire et en déduire les solutions réelles.