Chapitre 1

Équations différentielles ordinaires linéaires du premier ordre

Commençons par quelques généralités sur les équations différentielles. On appelle **équation différentielle** toute équation possédant les deux caractéristiques suivantes :

– l'inconnue de l'équation est une fonction définie sur un ensemble $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$,
– l'équation met en relation cette fonction inconnue avec ses dérivées (classiques si $n = 1$ ou partielles si $n \geq 2$).

On distingue deux grandes classes d'équations différentielles :

– les **équations différentielles ordinaires (EDO)** lorsque la fonction inconnue, usuellement notée y , ne dépend que d'une seule variable réelle (x ou t en général),
– les **équations aux dérivées partielles (EDP)** lorsque l'inconnue, en général notée u dans ce cas, est une fonction à plusieurs variables (x, y ou t, x ou x, y, z, t etc.).

Les équations différentielles sont utilisées pour modéliser mathématiquement de nombreux phénomènes physiques, biologiques ou encore financiers. Leur étude revêt donc un intérêt particulier dans le monde de la recherche et de l'industrie.

Nous ne nous intéresserons dans ce cours qu'aux EDO, et plus particulièrement aux **EDO linéaires (EDOL)**, qui sont les EDO de la forme :

$$a_k(x)y^{(k)}(x) + \cdots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = b(x) \ ,$$

où les fonctions $(a_i)_{1\leq i\leq k}$ ne dépendent pas de y.

Ce premier chapitre est consacré à l'étude des **EDOL du premier ordre** ($k = 1$).

1.1 Définitions et vocabulaire

On appelle équation différentielle ordinaire linéaire (EDOL) du premier ordre toute équation de la forme :

$$(E) \qquad a(x)y'(x) + b(x)y(x) = f(x)\,, \tag{1.1}$$

où y est une fonction réelle inconnue, et a, b et f sont des fonctions réelles connues.

Les fonctions a et b sont appelées **coefficients** de l'EDO et la fonction f **second membre** de l'EDO.

Définition 1.1 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On suppose que :*
- *les fonctions a, b et f sont continues sur I,*
- *pour tout $x \in I$, $a(x) \neq 0$.*

Sous ces conditions, on appelle ***solution de*** *(E) sur I toute fonction y de classe C^1 sur I et vérifiant (E) en tout point x de I.*

On ne cherchera jamais à résoudre l'équation (E) sur un intervalle I où les hypothèses ci-dessus ne sont pas vérifiées. Par commodité, nous utiliserons la notation $\mathcal{H}$ pour désigner ces hypothèses.

Vocabulaire :
- L'équation (E) est dite **homogène** si la fonction f est identiquement nulle : $f \equiv 0$.
- (E) est dite à **coefficients constants** si les fonctions a et b sont constantes.

Exemple 1.1 $y'(x) - y(x) = 0$; $\qquad xy'(x) - y(x) = 0$.

Remarque 1.1 *Le nom de la variable dont dépend la fonction y est complétement transparent, on peut l'appeler x, t, z, $IFCI$...*

1.2 Résolution des EDO linéaires du premier ordre

1.2.1 Existence de solutions

Etant donnée une équation différentielle linéaire du premier ordre, on peut se poser la question de l'existence de solutions. Les résultats suivants y répondent.

Proposition 1.1 *Si les hypothèses $\mathcal{H}$ sont vérifiées, alors l'équation (E) possède une infinité de solutions.*

Définition 1.2 *On appelle* ***condition initiale*** *(CI) toute condition du type $y(t_0) = \alpha$ où $t_0 \in I$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Cette condition vient compléter (E) pour former ce que l'on appelle un* ***problème de Cauchy*** *:*

$$(P) \qquad \begin{cases} a(t)y'(t) + b(t)y(t) = f(t)\,, \\ y(t_0) = \alpha\,. \end{cases}$$

Le résultat suivant nous assure que le problème précédent possède une solution unique.

Théorème 1.1 *Si les hypothèses $\mathcal{H}$ sont vérifiées, alors le problème de Cauchy (P) possède une unique solution sur I.*

A retenir : Sans condition initiale, l'EDO (E) possède toujours une infinité de solutions. Avec condition initiale, il n'existe qu'une seule solution.

Le résultat suivant nous donne une méthodologie de calcul des solutions d'une EDOL du premier ordre.

Théorème 1.2 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et (E) une EDOL du premier ordre telles que les hypothèses $\mathcal{H}$ sont vérifiées. Toutes les solutions de (E) s'écrivent alors :*

$$y(x) = y_h(x) + y_0(x)$$

où :

- *y_h est solution de l'équation homogène associée à (E) et notée (E_h) :*

$$(E_h) \qquad a(x)y'(x) + b(x)y(x) = 0\,.$$

- *y_0 est une solution de (E), appelée solution particulière.*

Pour résoudre une EDOL du premier ordre, on procédera donc en deux étapes :

1. **calcul des solutions de l'équation homogène (E_h),**
2. **recherche d'une solution particulière de l'équation complète (E).**

1.2.2 Résolution des EDOL homogènes du premier ordre

On s'intéresse dans ce paragraphe à la résolution des EDO linéaires homogènes de la forme :

$$(E_h) \qquad a(x)y_h'(x) + b(x)y_h(x) = 0\,.$$

Proposition 1.2 *Soit I un intervalle où les hypothèses $\mathcal{H}$ sont vérifiées. Alors toutes les solution de (E_h) s'écrivent sous la forme :*

$$y_h(x) = Ce^{u(x)}\,, \quad \forall x \in I\,,$$

appelée solution générale de (E_h) et où :

- *u est une **primitive** de la fonction $x \mapsto \dfrac{-b(x)}{a(x)}$, c'est à dire : $u'(x) = -\dfrac{b(x)}{a(x)}$, $\forall x \in I$,*
- *C est une **constante réelle arbitraire**.*

Exercice 1. Résoudre les équations différentielles suivantes :

(a) $y' - 3y = 0$,	(d) $y' = (1+t^2)y$,
(b) $xy'(x) + y(x) = 0$,	(e) $(1-t)y'(t) - ty(t) = 0$,
(c) $xy'(x) + 3y(x) = 0$,	(f) $(t^2+3t+2)y'(t) - y(t) = 0$.

1.2.3 Recherche de solutions particulières aux EDOL non-homogènes du premier ordre

On commence toujours par regarder s'il n'y a pas de solution évidente, sinon on peut appliquer l'une des méthodes suivantes :

Cas d'une EDO à coefficients constants

- Si le second membre est constant, par exemple $f(x) = \alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R}$, alors une solution particulière est $y_0(x) = \dfrac{\alpha}{b}$.

- Si le second membre est de la forme $f(x) = \alpha\cos(x) + \beta\sin(x)$ alors on peut chercher une solution sous la forme : $y_0(x) = c_1\cos(x) + c_2\sin(x)$.

- Si le second membre est de la forme $f(x) = e^{\lambda x}P_n(x)$ où P_n est un polynôme de degré n :

  1^{er} cas : si $\lambda \neq r = -\frac{b}{a}$, alors on cherche une solution sous la forme $y_0(x) = e^{\lambda x}Q_n(x)$ où Q_n est un polynôme de degré n.

  2^{eme} cas : si $\lambda = r = -\frac{b}{a}$, on cherche une solution sous la forme $y_0(x) = e^{\lambda x}xQ_n(x)$ où Q_n est un polynôme de degré n.

Cas général - Méthode de variation de la constante

Le principe est le suivant : on a trouvé une solution de l'équation homogène de la forme : $y_h(x) = Ce^{u(x)}$. On va chercher une solution particulière sous la forme :

$$y_0(x) = C(x)e^{u(x)}.$$

La constante C est "devenue" une fonction et vérifie alors :

$$C'(x) = \frac{f(x)}{a(x)}e^{-u(x)} \qquad \text{à intégrer pour trouver } C(x), \text{ puis } y_0(x).$$

Exercice 2. Résoudre les équations différentielles suivantes et préciser les intervalles où sont définies les solutions :

(a)	$y' + 2y = 2\cos(t)$,	(d)	$y' + y = e^t$,
(b)	$xy'(x) + y(x) = x^2 + e^x$,	(e)	$y' + y = te^{-t}$,
(c)	$y' + \ln(x)y(x) = \ln(x)$,	(f)	$y' + y = te^{-t} + e^t$