

Examen du module Outils Mathématiques

Calculatrices et documents autorisés

Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1 Fonctions usuelles (4pts).

Résoudre l'équation suivante :

$$\ln(x) + \ln(4x^2 + 8x + 4) = 4 \ln(x + 1).$$

Exercice 2 Nombres complexes (2pts).

Soit $z = \sqrt{3}i - 1$, déterminer $|z|$, $\text{Arg}(z)$, z^2 et $\frac{1}{z}$.

Exercice 3 Logique (3pts).

Déterminer, en la justifiant, la valeur de vérité de la proposition suivante :

$$(Q \Rightarrow (P \text{ et } R)) \Rightarrow ((P \Rightarrow Q) \text{ et } R).$$

Exercice 4 Logique (4pts).

On considère les assertions suivantes :

$$P : \forall x \in \mathbb{R}^-, \exists y \in \mathbb{R}^+, y^3 > x^3.$$

$$Q : \exists x \in \mathbb{R}^-, \forall y \in \mathbb{R}, y^3 > x^3.$$

1. Ecrire la négation de P et la négation de Q .
2. En justifiant vos réponses, donner les valeurs de vérités de P et Q .

Exercice 5 Raisonnement par récurrence (3pts).

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in [0, 2[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_n \text{ bien défini et } 0 \leq u_n < 2.$$

Exercice 6 *Division euclidienne (2pts).*

Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne des polynômes :

$$A(x) = x^5 + 2x + 5 \quad \text{et} \quad B(x) = x^2 - 3x + 2.$$

Exercice 7 *Factorisation de polynômes (3pts).*

Factoriser dans $\mathbb{R}[x]$ et $\mathbb{C}[x]$ le polynôme $P(x) = x^4 + x^2 - 6$.

Exercice 8 *Décomposition en éléments simples (4pts).*

Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}[x]$ la fonction rationnelle suivante :

$$F(x) = \frac{2x^4 - 2x^2 + 3}{x^4 - 2x^2 + 1}.$$

FIN