Corrigé Feuille n°3

Exercice 1 :

1)

$$
\begin{array}{l|l}
x^7 - 2x^6 \quad + 3x^4 \qquad\qquad - 2x + 1 & x^3 + 1 \\
\hline
-(x^7 \qquad\qquad + x^4) & x^4 - 2x^3 + 2x + 2 \\
\hline
\quad -2x^6 \quad + 2x^4 \qquad\qquad - 2x + 1 & \\
\quad -(-2x^6 \qquad\qquad - 2x^3 \qquad\qquad) & \\
\hline
\qquad\qquad 2x^4 + 2x^3 \quad - 2x + 1 & \\
\qquad\quad -(2x^4 \qquad\qquad + 2x \quad) & \\
\hline
\qquad\qquad\qquad + 2x^3 \quad - 4x + 1 & \\
\qquad\qquad\quad -(2x^3 \qquad\qquad + 2) & \\
\hline
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad - 4x - 1 &
\end{array}
$$

Donc $\boxed{x^7 - 2x^6 + 3x^4 - 2x + 1 = (x^3+1)(x^4 - 2x^3 + 2x + 2) - 4x - 1}$

2)
$$
\begin{array}{rl|l}
 & x^4 + ix^3 \qquad + 3x - 1 & x^2 + (1+i)x + 1 \\
\cline{3-3}
- & \left(x^4 + (1+i)x^3 + x^2 \qquad\qquad\right) & x^2 - x + i \\
\cline{2-3}
 & -x^3 - x^2 + 3x - 1 & \\
- & \left(-x^3 - (1+i)x^2 - x \qquad\right) & \\
\cline{2-2}
 & ix^2 + 4x - 1 & \\
- & \left(ix^2 + (1+i)ix + i\right) & \\
\cline{2-2}
 & (5-i)x - i - 1 &
\end{array}
$$

Donc $\boxed{x^4 + ix^3 + 3x - 1 = (x^2 + (1+i)x + 1)(x^2 - x + i) + (5-i)x - (i+1)}$

Exercice 2 :

1) $\deg(P) = 6$ et 1 est racine triple de P, donc :

$\exists Q \in \mathbb{R}[x]$ tel que $\underline{P(x) = (x-1)^3 Q(x)}$,

avec $\underline{Q(1) \neq 0}$ et $\underline{\deg(Q) = 3}$

En effet, 1 racine triple de $P \Leftrightarrow (x-1)^3$ divise P, et en notant Q le quotient de P par $(x-1)^3$, on sait que $\deg(P) = \deg((x-1)^3) + \deg(Q)$, d'où $\deg(Q) = 3$.

Mais par ailleurs, 3 est aussi racine triple de P.
Or $P(x) = (x-1)^3 Q(x)$, donc $\underline{3 \text{ est forcément racine triple de } Q}$, puisque 3 n'est pas racine de $(x-1)^3$.

Donc $\exists R \in \mathbb{R}[x]$ tel que $\underline{Q(x) = (x-3)^3 R(x)}$

où $R(3) \neq 0$ et $\deg(R) = 0$.

En effet, $\deg(Q) = \deg((x-3)^3) + \deg(R)$, donc $\deg(R) = 0$.

Donc $\underline{R(x) = \alpha}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, où α est une <u>constante réelle</u>. <u>(non nulle)</u>

<u>Bilan</u>: P est nécessairement de la forme :

$$\boxed{P(x) = \alpha (x-1)^3 (x-3)^3, \text{ où } \alpha \in \mathbb{R}^*.}$$

<u>N.B.</u> : On aurait pu aller plus vite en remarquant que la somme des multiplicités des deux racines était égale à 6, c'est à dire le degré de P. On voit ainsi que l'on a toutes les racines de P (avec leur multiplicité) : 1, 1, 1, 3, 3 et 3.

Donc on peut utiliser le théorème 1.16 p 8 :

$$\boxed{P(x) = a_6 (x-1)^3 (x-3)^3 \text{ où } a_6 \in \mathbb{R}^*}$$

<u>N.B.2</u> : De manière plus générale, lorsque vous considérez un polynôme <u>P de degré n</u>, et que vous savez par exemple que <u>α est racine d'ordre k_1</u> et <u>β racine d'ordre k_2</u>, alors <u>vous avez dorénavant le droit de dire directement que</u> :

$$\boxed{\begin{array}{l} P(x) = (x-\alpha)^{k_1} (x-\beta)^{k_2} Q(x), \\ \quad \text{où } Q(\alpha) \neq 0,\ Q(\beta) \neq 0 \text{ et } \deg(Q) = n - k_1 - k_2 \end{array}}$$

2) On sait que 1 est racine double de P, 3 racine triple et -1 racine simple. On a donc $2+3+1=6$ racines de P : $1, 1, 3, 3, 3, -1$.
Or $\deg(P)=6$, donc on a toutes les racines de P.
Donc d'après le théorème de factorisation (1.15 p 8) :

$$P(x) = a_6 (x-1)^2 (x-3)^3 (x+1), \text{ où } a_6 \in \mathbb{R}^*.$$

Mais on sait aussi que $P(0)=1$.
Or $P(0) = a_6(0-1)^2(0-3)^3(0+1) = -27a_6$.
Donc $-27a_6 = 1$, soit $a_6 = \frac{-1}{27}$.

On a donc au final : $\boxed{P(x) = \frac{-1}{27}(x-1)^2(x-3)^3(x+1), \forall x \in \mathbb{R}.}$

3) i est racine simple, $1-i$ racine double et 3 racine simple de P, donc d'après la remarque du 1), qui fait office de théorème à part entière, on a :

$$P(x) = (x-i)(x-1+i)^2(x-3)\,Q(x)$$

avec $Q(i) \neq 0$, $Q(1-i) \neq 0$, $Q(3) \neq 0$ et $\deg(Q) = \deg(P) - (1+2+1) = 7-4 = 3$

Mais le fait que $P \in \mathbb{R}[x]$ et le théorème 1.14 p 8 nous permet d'aller plus loin : si $\alpha \in \mathbb{C}$ est racine de P alors son conjugué $\bar{\alpha}$ est aussi racine de P, de même multiplicité que α.
On en déduit que :

- $\bar{i} = -i$ est racine simple de P
- $\overline{1-i} = 1+i$ est racine double de P

Bilan : on a au final 7 racines pour P, qui sont $i, -i$, $1-i, 1-i, 1+i, 1+i$ et 3. Or $\deg(P) = 7$ donc on les a toutes !

Donc $\quad P(x) = a_7(x-i)(x+i)(x-1+i)^2(x-1-i)^2(x-3)$, où $a_7 \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \underline{P(x) = a_7(x^2+1)(x^2-2x+2)^2(x-3)}, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

où $a_7 \in \mathbb{R}^*$.

Pour finir, on sait que $P(1) = 2$, donc :

$$a_7(1+1)(1-2+2)(1-3) = 2$$

$$\Rightarrow \boxed{a_7 = \frac{-1}{2}}$$

Donc $\quad \boxed{P(x) = \frac{-1}{2}(x^2+1)(x^2-2x+2)^2(x-3), \ \forall x \in \mathbb{R}.}$

Exercice 3 :

1) • On sait que $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$.

Donc $x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Racines de $Q(x) = x^2+x+1$:

$$\Delta = -3 < 0 \text{ donc } \begin{cases} x_1 = \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \\ x_2 = \frac{-1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$

Les racines de Q sont complexes ($\in \mathbb{C}$), on ne peut donc pas les utiliser pour factoriser P dans $\mathbb{R}[x]$.
Mais on les utilise bien sûr pour factoriser P dans $\mathbb{C}[x]$.

Factorisation de P dans $\mathbb{R}[x]$:

$$\boxed{P(x) = (x-1)(x^2+x+1), \ \forall x \in \mathbb{R}.}$$

N.B. : on vient de voir que $Q(x) = x^2+x+1$ n'a pas de racine dans $\mathbb{R}$: il est donc irréductible dans $\mathbb{R}[x]$.
Mais on pouvait le voir directement grâce au cours :
$x^2+x+1 = x^2 - sx + p$ avec $s = -1$ et $p = 1$, donc
on a $s^2 - 4p = -3 < 0$. D'où Q irréductible dans $\mathbb{R}[x]$.

Factorisation de P dans $\mathbb{C}[x]$:

$$\boxed{P(x) = (x-1)\left(x+\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \ \forall x \in \mathbb{C}}$$

- $Q(x) = x^4 + 1$.

Déjà, on voit que $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^4 + 1 > 0$.
Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $Q(x) \neq 0$.
Ainsi, Q n'a <u>aucune racine réelle</u>.

<u>Racines complexes de Q :</u>

Pour résoudre x^4+1 dans $\mathbb{C}$, il faut passer à la forme trigonométrique sur x : posons $x = \rho e^{i\theta}$, avec $\rho \in \mathbb{R}^+$ et $\theta \in [0, 2\pi]$.

Alors $x^4 + 1 = 0 \Leftrightarrow (\rho e^{i\theta})^4 = -1$

$$\Leftrightarrow \rho^4 e^{i(4\theta)} = 1 . e^{i\pi} \quad (\text{car } -1 = e^{i\pi})$$

Or $\rho_1 e^{i\theta_1} = \rho_2 e^{i\theta_2} \Leftrightarrow \rho_1 = \rho_2$ <u>et</u> $\theta_1 = \theta_2$.

Donc $\begin{cases} \rho^4 = 1, \\ 4\theta = \pi + 2k\pi \\ (k \in \mathbb{Z}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = 1 & (\text{car } \rho > 0) \\ \theta = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$

Or $\theta \in [0, 2\pi]$, donc $\left| \begin{array}{l} \theta = \frac{\pi}{4} \text{ ou } \theta = \frac{3\pi}{4} \\ \text{ou } \theta = \frac{5\pi}{4} \text{ ou } \theta = \frac{7\pi}{4}. \end{array} \right.$

Donc $x = e^{i\frac{\pi}{4}}$ ou $x = e^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)}$ ou $x = e^{i\left(\frac{5\pi}{4}\right)}$ ou $x = e^{i\left(\frac{7\pi}{4}\right)}$.

Autrement dit : $\left| \begin{array}{l} x = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ou } x = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{i\sqrt{2}}{2} \\ \text{ou } x = \frac{-\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ou } x = \frac{-\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}. \end{array} \right.$

On obtient ainsi la <u>factorisation de Q dans $\mathbb{C}[x]$:</u>

$$\boxed{Q(x) = \left(x - \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \forall x \in \mathbb{C}.}$$

Pour obtenir la factorisation, il faut regrouper les facteurs $(x-\alpha)$ par deux en associant chaque racine avec son conjugué (qui est aussi racine car $P\in\mathbb{R}[x]$).
Ainsi, pour toute racine α, on regroupe $(x-\alpha)$ avec $(x-\bar{\alpha})$ pour former $(x-\alpha)(x-\bar{\alpha}) = x^2 - 2\mathrm{Re}(\alpha)x + |\alpha|^2$.
On obtient alors :

$$P(x) = \left[\underbrace{\left(x-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)\left(x-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)}_{\text{racines conjuguées}}\right]\left[\underbrace{\left(x-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)\left(x-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)}_{\text{racines conjuguées}}\right]$$

D'où $P(x) = \left(x^2 - 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)x+1\right)\left(x^2-2\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)x+1\right)$, $\forall x\in\mathbb{R}$

$$\Rightarrow \boxed{P(x) = (x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1),\ \forall x\in\mathbb{R}.}$$

2) a) $P(x) = x^n - 1$, où $n\in\mathbb{N}^*$.
Les racines de P dans $\mathbb{C}$ sont appelées <u>racines n-ièmes de l'unité</u>. Comme précédemment, on utilise la forme trigonométrique de x en posant $x=\rho e^{i\theta}$ avec $\rho\in\mathbb{R}_+$ et $\theta\in[0,2\pi]$, afin de trouver les <u>racines complexes de P</u>.

$$x^n - 1 = 0 \iff (\rho e^{i\theta})^n - 1 = 0,$$
$$\iff \rho^n e^{in\theta} = 1 = 1.e^{i.0} \quad (\text{car } 1 = e^{i.0})$$
$$\iff \begin{cases}\rho^n = 1\\ n\theta = 0+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$
$$\iff \begin{cases}\rho = 1 \text{ car } \rho\geq 0.\\ \theta = \frac{2k\pi}{n},\ k\in\mathbb{Z}.\end{cases}$$

Et $\theta \in [0, 2\pi]$, donc les seules valeurs possibles de θ sont :

$\theta = 0$ ou $\theta = \frac{2\pi}{n}$ ou $\theta = \frac{4\pi}{n}$ ou ... ou $\theta = \frac{2(n-1)\pi}{n}$

(on s'arrête à $\frac{2(n-1)\pi}{n}$ car $\frac{2n\pi}{n} = 2\pi$ et on retombe sur la même solution que pour $\theta = 0$). (dans $\mathbb{C}$)

Si on note $\mathcal{R}$ l'ensemble des racines de P, on a donc :

$$\boxed{\mathcal{R} = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}},\ k \in \mathbb{N} \text{ et } 0 \leq k \leq n-1 \right\}}$$

<u>N.B.</u> : $\deg(P) = n$ et on a trouvé <u>n racines de P</u>, on est donc bien sûr de les avoir toutes trouvées.

b) La factorisation de P dans $\mathbb{C}[x]$ se déduit directement :

$$\boxed{P(x) = (x-1)\left(x - e^{\frac{2i\pi}{n}}\right)\left(x - e^{\frac{4i\pi}{n}}\right) \dots \left(x - e^{\frac{2i(n-1)\pi}{n}}\right)}$$

$(\forall x \in \mathbb{C})$

<u>N.B.</u> : on peut aussi noter :

$$P(x) = \prod_{k=0}^{n-1} \left(x - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right),\ \forall x \in \mathbb{C}.$$

Comme expliqué précédemment, il faut regrouper les racines <u>complexes</u> par deux : chaque racine et son <u>conjugué</u>. La racine $\alpha = 1$ $\boxed{k=0}$ est réelle, elle ne subit donc aucun "regroupement".

⚠ $\alpha = e^{\frac{2ik\pi}{n}} \implies \bar{\alpha} = e^{-\frac{2ik\pi}{n}} = e^{i\left(-\frac{2k\pi}{n}\right)} \cdot e^{i(2\pi)}$ (car $e^{i(2\pi)} = 1$)

$$\implies \bar{\alpha} = e^{i\left(2\pi - \frac{2k\pi}{n}\right)}$$

$$\implies \bar{\alpha} = e^{i2\pi\left(1 - \frac{k}{n}\right)} = e^{\frac{2i(n-k)\pi}{n}}$$

Il faut donc regrouper, pour chaque k compris entre 0 et $n-1$, les facteurs $\left(x - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)$ et $\left(x - e^{\frac{2i(n-k)\pi}{n}}\right)$.

Il faut néanmoins distinguer les cas n pair du cas n impair ! Car si n pair, on a deux fois le même facteur pour $k = \frac{n}{2}$ (le vérifier).

<u>1^{er} cas : n pair</u>

Pour $k = \frac{n}{2}$, on a deux fois le même facteur : $x - e^{i\pi}$.
Or $e^{i\pi} = -1$. Donc on tombe sur la <u>racine réelle -1</u>.
Et c'est normal ! Car les racines <u>réelles</u> de $x^n - 1$ lorsque n est pair sont <u>1 et -1</u> !
Sinon, lorsque n est impair, seul 1 est racine réelle.
Il reste donc à regrouper $\left(x - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)$ et $\left(x - e^{\frac{2i(n-k)\pi}{n}}\right)$ pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n-1$ <u>et</u> $k \neq \frac{n}{2}$:

$$\left(x - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)\left(x - e^{\frac{2i(n-k)\pi}{n}}\right) = x^2 - 2\mathrm{Re}\left(e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right) + \left|e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right|$$

Or $e^{\frac{2ik\pi}{n}} = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$, donc :

$$\mathrm{Re}\left(e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right) = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \text{ et } \left|e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right| = 1.$$

Donc $\left(x - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)\left(x - e^{\frac{2i(n-k)\pi}{n}}\right) = x^2 - 2\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + 1$.

<u>Bilan :</u>
$$\boxed{P(x) = (x-1)(x+1)\prod_{k=1}^{\frac{n}{2}-1}\left(x^2 - 2\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + 1\right), \ \forall x \in \mathbb{R}.}$$

2ème cas : n impair

Ici, $k = \frac{n}{2} \notin \mathbb{N}$ donc on n'a plus à traiter ce cas à part.

On obtient donc directement :

$$\boxed{P(x) = (x-1) \prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \left(x^2 - 2\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + 1\right), \forall x \in \mathbb{R}.}$$

__Exercice 4 :__

1/a) __Pour F_1 :__

$F_1(x) = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ où $deg(P_1) = 2$ et $deg(Q_1) = 3+2 = 5$.

Donc $deg(P_1) < deg(P_1)$.

Aucune division euclidienne n'est nécessaire : $\boxed{E_1(x) = 0}$.
$(\forall x \in \mathbb{R})$

__Pour F_2 :__

$F_2(x) = \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}$ où $deg(P_2) = 4$ et $deg(Q_2) = 3$.

Donc $deg(P_2) > deg(Q_2)$, il faut poser la division euclidienne pour calculer la partie entière E_2 de F_2.

$$\begin{array}{r|l} x^4 & x^3+8 \\ \hline -8x & x \end{array}$$

donc $\frac{x^4}{x^3+8} = x - \frac{8x}{x^3+8}, \forall x \in \mathbb{R}$.

Il vient donc : $\boxed{E_2(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}}$

b) __Pour F_1 :__

$Q_1(x) = (x-1)^3 (x^2+x-6), \forall x \in \mathbb{R}$.

Pour obtenir les pôles de F_1, il faut déterminer les racines de Q_1.

Déjà, on voit que 1 est racine triple (au moins) de Q_1 car $(x-1)^3$ divise $Q_1(x)$.

Il reste à déterminer les racines α_1 et α_2 de x^2+x-6 :
$\Delta = 25 = 5^2 > 0 \Rightarrow \alpha_1 = 2$ et $\alpha_2 = -3$.

Donc $Q_1(x) = (x-1)^3(x-2)(x+3)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

A ce stade, avant d'affirmer que les pôles de F_1 sont les racines de Q_1, il faut <u>vérifier que F_1 est bien sous forme irréductible</u>, autrement dit vérifier que P_1 et Q_1 n'ont <u>aucune racine commune</u> !

Ici, $P_1(x) = x^2-3x+2$, $\forall x \in \mathbb{R}$, et les racines de P_1 sont 1 (évidente) et 2 (évidente).
Donc $P_1(x) = (x-1)(x-2)$.

On a donc 2 racines communes entre P_1 et Q_1 : F_1 n'est <u>pas sous forme irréductible</u>, il faut donc trouver cette forme en <u>simplifiant</u> F_1 :

$$F_1(x) = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} = \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)^3(x-2)(x+3)}, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Donc $\boxed{F_1(x) = \frac{1}{(x-1)^2(x+3)}, \ \forall x \in \mathbb{R} - \{1,-3\}}$ (après prolongement par continuité)

On a maintenant bien la forme irréductible de F_1 !
Les racines du "nouveau" Q_1 sont 1 (double) et -3.

Donc $\boxed{\text{les pôles de } F_1 \text{ sont } 1 \text{ (double) et } -3 \text{ (simple)}}$

(les pôles sont tous réels)

__Pour F_2 :__

$Q_2(x) = x^3 + 8, \ \forall x \in \mathbb{R}.$

On remarque que -2 est racine évidente de Q_2, on a donc :

$$Q_2(x) = (x+2)\, R_2(x) \quad \text{où } \deg(R_2) = 3 - 1 = 2.$$

Posons la division euclidienne :

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 8 & x + 2 \\ \hline -2x^2 + 8 & x^2 - 2x + 4 \\ 4x + 8 & \\ \hline \end{array}$$

Donc $Q_2(x) = (x+2)(x^2 - 2x + 4), \ \forall x \in \mathbb{R}.$

Cherchons les racines de $x^2 \ x + 4$ (notées β_1 et β_2) :

$$\Delta = -12 = -(2\sqrt{3})^2 < 0 \text{ donc } \begin{cases} \beta_1 = 1 + i\sqrt{3}, \\ \beta_2 = 1 - i\sqrt{3}. \end{cases}$$

Donc $Q_2(x) = (x+2)(x - (1+i\sqrt{3}))(x - (1 - i\sqrt{3})), \ \forall x \in \mathbb{R}.$

Bilan : $\boxed{\text{$F_2$ a un seul pôle réel qui est -2 (de multiplicité 1) et deux pôles complexes qui sont $1+i\sqrt{3}$ et $1-i\sqrt{3}$ (de multiplicité 1 tous les deux).}}$

c) On obtient alors :

$$\boxed{\mathcal{D}_{F_1}^{\mathbb{R}} = \mathbb{R} - \{-3, 1\} \text{ dans } \mathbb{R} \text{ et dans } \mathbb{C}_{(*)}}$$

(*) en remplaçant $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$

et pour F_2 :

$$\boxed{\mathcal{D}_{F_2}^{\mathbb{R}} = \mathbb{R} - \{-2\} \text{ dans } \mathbb{R}}$$

$$\text{et } \boxed{\mathcal{D}_{F_2}^{\mathbb{C}} = \mathbb{C} - \{-2, 1+i\sqrt{3}, 1-i\sqrt{3}\} \text{ dans } \mathbb{C}}.$$

2) • <u>Décomposition de F_1 :</u>

On cherche a_1, b_1 et c_1 les trois réels tels que :

$$F_1(x) = \frac{1}{(x-1)^2(x+3)} = \frac{a_1}{x-1} + \frac{b_1}{(x-1)^2} + \frac{c_1}{x+3}, \ \forall x \in \mathcal{D}_{F_1}$$

Il n'y a pas de parité/imparité à exploiter ici.
En revanche, on a pour tout $x \neq -3$:

$$(x-1)^2 F_1(x) = \frac{1}{x+3} = a_1(x-1) + b_1 + \frac{c_1(x-1)^2}{x+3}.$$

Donc <u>en $x=1$</u> : $\boxed{\frac{1}{4} = b_1}$.

De même, on a pour tout $x \neq 1$:

$$(x+3)F_1(x) = \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{a_1(x+3)}{x-1} + \frac{x+3}{4(x-1)^2} + c_1.$$

En évaluant en $x=-3$: $\boxed{c_1 = \frac{1}{16}}$.

Pour trouver a_1, il suffit d'évaluer en 0 :

$$F_1(0) = \frac{1}{3} = -a_1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{48}$$

Donc $a_1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{48} - \frac{1}{3} \Rightarrow \boxed{a_1 = \frac{-1}{16}}$.

Bilan : $\boxed{F_1(x) = \frac{-1}{16(x-1)} + \frac{1}{4(x-1)^2} + \frac{1}{16(x+3)},\ \forall x \in \mathcal{D}_{F_1}.}$

Cette décomposition est évidemment valable à la fois dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$ puisque les pôles de F_1 sont tous réels.

- Décomposition de F_2 :

Commençons (puisque les deux sont demandées) par la décomposition de F_2 dans $\mathbb{C}$.

On cherche ~~les~~ a_2, b_2 et c_2 tels que :

$$F_2(x) = \frac{x^4}{x^3+8} = x + \frac{a_2}{x+2} + \frac{b_2}{x-(1+i\sqrt{3})} + \frac{c_2}{x-(1-i\sqrt{3})}$$

$$\forall x \in \mathcal{D}^{\mathbb{C}}_{F_2}.$$

Là non plus, aucune parité/imparité à exploiter.
Mais on a $\forall x \in \mathbb{C} - \{1+i\sqrt{3}, 1-i\sqrt{3}\}$:

$$(x+2)F_2(x) = \frac{(x+2)x^4}{x^3+8} = (x+2)x + a_2 + \frac{b_2(x+2)}{x-(1+i\sqrt{3})} + \frac{c_2(x+2)}{x-(1-i\sqrt{3})}$$

Or on a vu : $Q_2(x) = x^3+8 = (x+2)(x-(1+i\sqrt{3}))(x-(1-i\sqrt{3}))$
(pour simplifier, on note $\beta_1 = 1+i\sqrt{3}$ et $1-i\sqrt{3} = \beta_2$ à partir de maintenant), soit $Q_2(x) = (x+2)(x-\beta_1)(x-\beta_2)$.

Donc $(x+2)F_2(x) = \dfrac{x^4}{(x-\beta_1)(x-\beta_2)} = (x+2)x + a_2 + \dfrac{b_2(x+2)}{x-\beta_1} + \dfrac{c_2(x+2)}{x-\beta_2}$

Evaluons en $\underline{x=-2}$: $\dfrac{16}{(-2-\beta_1)(-2-\beta_2)} = a_2$.

Or $(2-\beta_1)(2-\beta_2) = 4+2(\beta_1+\beta_2)+\beta_1\beta_2 = 4+2\cdot 2+4 = 12$.

D'où $\boxed{a_2 = \frac{4}{3}}$.

De même, $\forall x \in \mathbb{C} - \{-2, 1-i\sqrt{3}\}$:

$$(x-\beta_1)F_2(x) = \frac{x^4}{(x+2)(x-\beta_2)} = (x-\beta_1)x + \frac{4(x-\beta_1)}{3(x+2)} + b_2 + \frac{c_2(x-\beta_1)}{x-\beta_2}$$

$\underline{\text{En } x=\beta_1}$: $\dfrac{\beta_1^4}{(\beta_1+2)(\beta_1-\beta_2)} = b_2$.

Or $\beta_1 = 1+i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$, donc $\beta_1^4 = 16e^{i4\pi/3}$.

$$\beta_1-\beta_2 = 2i\sqrt{3} \Rightarrow (\beta_1+2)(\beta_1-\beta_2) = (3+i\sqrt{3})(2i\sqrt{3})$$
$$= -6+6i\sqrt{3}$$
$$= -6(1-i\sqrt{3})$$
$$= -12e^{-i\pi/3}$$

Donc $b_2 = \dfrac{16 e^{i 4\pi/3}}{(-12 e^{-i\pi/3})} = \dfrac{-4}{3} e^{i 5\pi/3}$.

Mais $e^{i 5\pi/3} = \dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{1}{2}(1 - i\sqrt{3}) = \dfrac{1}{2}\beta_2$.

Au final, $\boxed{b_2 = \dfrac{-2}{3}\beta_2 = \dfrac{-2}{3}(1-i\sqrt{3})}$.

En évaluant F_2 en 0, on obtient alors :

$$F_2(0) = 0 = 0 + \frac{4}{6} + \frac{2\beta_2}{3\beta_1} - \frac{c_2}{\beta_2}.$$

d'où $c_2 = \dfrac{2}{3}\beta_2 + \dfrac{2}{3}\dfrac{(\beta_2)^2}{\beta_1} = \dfrac{2}{3}\left[2e^{-i\frac{\pi}{3}} + \dfrac{4e^{-2i\pi/3}}{2e^{i\pi/3}}\right]$

$$\Rightarrow c_2 = \frac{4}{3}\left[e^{-i\pi/3} + e^{-i\pi}\right] = \frac{4}{3}\left[\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 1\right]$$

$$\Rightarrow c_2 = \frac{4}{3}\left[\frac{-1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$

Donc $\boxed{c_2 = \dfrac{-2}{3}(1+i\sqrt{3})}$.

La décomposition de F_2 dans $\mathbb{C}$ est donc :

$$\boxed{F_2(x) = x + \frac{4}{3(x+2)} - \frac{2(1-i\sqrt{3})}{3(x-(1+i\sqrt{3}))} - \frac{2(1+i\sqrt{3})}{3(x-(1-i\sqrt{3}))}, \quad \forall x \in \mathcal{D}_{F_2}^{\mathbb{C}}.}$$

<u>Astuce</u> : pour obtenir la décomposition dans $\mathbb{R}$ à partir de celle dans $\mathbb{C}$, il suffit de regrouper 2 à 2 et mettre sous même dénominateur les éléments simples correspondant aux complexes conjugués.

Ici, on regroupe donc les deux derniers termes de la décomposition de F_2 car l'un de ces termes est l'élément simple lié pôle complexe β_1 et l'autre celui lié au pôle complexe β_2 qui est le conjugué de β_1 !

$$\frac{-2(1-i\sqrt{3})}{3(x-\beta_1)} - \frac{2}{3}\frac{(1+i\sqrt{3})}{(x-\beta_2)} = \frac{-2}{3}\frac{[(1-i\sqrt{3})(x-\beta_2)+(1+i\sqrt{3})(x-\beta_1)]}{(x-\beta_1)(x-\beta_2)}$$

$$= \frac{-2}{3}\frac{2x+4}{x^2-2x+4}.$$

On obtient alors la décomposition de F_2 dans $\mathbb{R}$:

$$\boxed{F_2(x) = x + \frac{4}{3(x+2)} - \frac{4(x+2)}{3(x^2-2x+4)},\ \forall x \in \mathcal{D}_{F_2}^{\mathbb{R}}}$$

Exercice 5 :

1) $F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ avec $\deg(P) = 1$ et $\deg(Q) = 3$.

Donc $\deg(P) < \deg(Q)$, ce qui entraine que la partie entière $E(x)$ de $F(x)$ est nulle : $E(x) = 0$.

De plus, les pôles de F sont $1, 2, 3$ et F est bien sous forme irréductible : $D_F = \mathbb{R} - \{1, 2, 3\}$.

Cherchons maintenant sa décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$, c'est à dire les réels a, b, c tels que :

$$\forall x \in D_F,\ F(x) = \frac{x}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{x-3}$$

. On a $\forall x \in \mathbb{R} - \{2, 3\}$:

$$(x-1)F(x) = \frac{x}{(x-2)(x-3)} = a + \frac{b(x-1)}{(x-2)} + \frac{c(x-1)}{x-3}$$

En $x = 1$: $\boxed{\frac{1}{2} = a}$

. De plus, $\forall x \in \mathbb{R} - \{1, 3\}$:

$$(x-2)F(x) = \frac{x}{(x-1)(x-3)} = \frac{x-2}{2(x-1)} + b + \frac{c(x-2)}{x-3}.$$

En $x = 2$: $\boxed{-2 = b}$

. Evaluons F en $x = 0$: $0 = \frac{-1}{2} + 1 - \frac{c}{3}$

donc $\boxed{c = \frac{3}{2}}$.

On obtient ainsi que :

$$\boxed{F(x) = \frac{1}{2(x-1)} - \frac{2}{x-2} + \frac{3}{2(x-3)}, \forall x \in \mathcal{D}_F.}$$

2) $\forall n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 4$, on a :

$$S_n = \sum_{k=4}^{n} \frac{k}{(k-1)(k-2)(k-3)} = \sum_{k=4}^{n} F(k)$$

$$\Rightarrow \quad S_n = \sum_{k=4}^{n} \left(\frac{1}{2(k-1)} - \frac{2}{k-2} + \frac{3}{2(k-3)} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=4}^{n} \frac{1}{k-1} - 2 \sum_{k=4}^{n} \frac{1}{k-2} + \frac{3}{2} \sum_{k=4}^{n} \frac{1}{k-3}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=3}^{n-1} \frac{1}{i} - 2 \sum_{j=2}^{n-2} \frac{1}{j} + \frac{3}{2} \sum_{l=1}^{n-3} \frac{1}{l}$$

(en posant $i = k-1$, $j = k-2$ et $l = k-3$)

En se rappelant que l'on est libre de nommer l'indice comme on veut, on a alors pour ces trois sommes :

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=3}^{n-1} \frac{1}{i} = \sum_{k=3}^{n-1} \frac{1}{k} = \sum_{k=3}^{n-3} \frac{1}{k} + \frac{1}{n-2} + \frac{1}{n-1}, \\ \displaystyle\sum_{j=2}^{n-2} \frac{1}{j} = \sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{k} = \sum_{k=3}^{n-3} \frac{1}{k} + \frac{1}{2} + \frac{1}{n-2}, \\ \displaystyle\sum_{l=1}^{n-3} \frac{1}{l} = \sum_{k=1}^{n-3} \frac{1}{k} = \sum_{k=3}^{n-3} \frac{1}{k} + 1 + \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Donc $$S_n = \underbrace{\left(\frac{1}{2} - 2 + \frac{3}{2}\right)}_{=0} \sum_{k=3}^{n-3} \frac{1}{k} + \frac{1}{2(n-2)} + \frac{1}{2(n-1)} - 1 - \frac{2}{n-2} + \frac{3}{2} + \frac{3}{4}.$$

Au final, on obtient :

$$\boxed{s_n = \frac{-3}{2(n-2)} + \frac{1}{2(n-1)} + \frac{5}{4}, \forall n \geqslant 4}.$$

Or $\begin{cases} \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{-3}{2(n-2)} \right) = 0 \\ \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{2(n-1)} \right) = 0 \end{cases}$

Donc $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} (s_n) = \frac{5}{4}}$.