Feuille d'exercices n°3

Exercice 1

Donner le quotient et le reste de la division euclidienne de la fonction polynôme A par la fonction polynôme B dans les cas suivants :

1. $A(x) = x^7 - 2\,x^6 + 3\,x^4 - 2\,x + 1$; $B(x) = x^3 + 1$.
2. $A(x) = x^4 + i\,x^3 + 3\,x - 1$; $B(x) = x^2 + (1+i)\,x + 1$.

Exercice 2

Dans chacun des cas suivants, déterminer le ou les polynômes $P \in \mathbb{R}[x]$ vérifiant :

1. $\deg(P) = 6$, et 1 et 3 sont racines triples de P.
2. $\deg(P) = 6$, 1 est racine double de P, 3 est racine triple, -1 est racine simple et $P(0) = 1$.
3. $\deg(P) = 7$, i est racine simple, $(1-i)$ est racine double, 3 est racine simple et $P(1) = 2$.

Exercice 3

1. Factoriser $P(x) = x^3 - 1$ et $Q(x) = x^4 + 1$ dans $\mathbb{C}[x]$ et dans $\mathbb{R}[x]$.
2. Soit $P(x) = x^n - 1$, $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Déterminer les racines de P dans $\mathbb{C}$.
   (b) En déduire la factorisation de P dans $\mathbb{C}[x]$ puis dans $\mathbb{R}[x]$ (on discutera suivant la parité de n).

Exercice 4

On considère les fonctions rationnelles : $F_1(x) = \dfrac{x^2 - 3\,x + 2}{(x-1)^3(x^2 + x - 6)}$

et $F_2(x) = \dfrac{x^4}{x^3 + 8}$.

1. Pour F_1 puis pour F_2 :
   (a) Donner la partie entière.
   (b) Donner les pôles et leur multiplicité dans $\mathbb{C}$ puis dans $\mathbb{R}$.
   (c) Donner le domaine de définition dans $\mathbb{C}$ puis dans $\mathbb{R}$.
2. Décomposer F_1 et F_2 en éléments simples dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$.

Exercice 5

1. Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ la fonction $F(x) = \dfrac{x}{(x-1)(x-2)(x-3)}$.
2. En déduire la valeur de $s_n = \displaystyle\sum_{k=4}^{n} \frac{k}{(k-1)(k-2)(k-3)}$ puis $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} s_n$.