Exercice 12 :

1) On note D l'ensemble des docteurs et E l'ensemble des personnes enthousiastes.
"Aucun docteur n'est enthousiaste" se traduit alors :

$$\forall x \in D,\ x \notin E.$$

ou bien de manière équivalente d'un point de vue logique :

$$x \in D \Longrightarrow x \notin E.$$

La contraposée de cette dernière proposition est donc :

$$x \in E \Longrightarrow x \notin D.$$

Or " Vous êtes enthousiaste " se traduit par : $x \in E$.

Donc on peut en déduire que $x \notin D$, soit " vous n'êtes pas docteur ". <u>Ce syllogisme est donc vrai.</u>

2) On note :
G = ensemble des gourmets,
N = ensemble des gens généreux, et O = tous mes oncles.
On traduit :
" Quelques gourmets manquent de générosité " par : $\exists x \in G, x \notin N$.
" Tous mes oncles sont généreux " par : $\forall x \in O, x \in N$.
Cette dernière peut aussi s'écrire : $x \in O \Rightarrow x \in N$
Ou par contraposée : $x \notin N \Rightarrow x \notin O$.
On obtient alors que :

$\exists x \in G, x \notin O$. (puisque $\exists x \in G, x \notin N$ et $x \notin N \Rightarrow x \notin O$)

Traduction : il existe au moins un gourmet qui n'est pas un de mes oncles.

Mon interprétation personnelle(*) est que la conclusion précédente ne confirme ni n'infirme la conclusion donnée, qui est "Mes oncles ne sont pas des gourmets". Cette dernière peut être soit vraie, soit fausse, on manque d'information pour décider sa valeur de vérité !

(*) contrairement à Lewis Carroll qui juge la conclusion fausse.

La seule chose que l'on peut décréter est que l'on ne peut pas conclure "Mes oncles ne sont pas des gourmets" des deux phrases précédentes ! Mais cela n'implique rien sur la valeur de vérité de cette conclusion.

C'est ce que l'on appelle un sophisme : c'est un syllogisme dont on ne peut pas dire si il est vrai ou faux. Il semble démontrer quelque chose mais ne démontre rien.

Exemple de sophisme : j'aime les arbres, les arbres ont des feuilles, donc j'aime les voitures.
On ne peut rien dire sur la valeur de vérité de la conclusion, seulement que les deux premières propositions ne suffisent pas pour conclure que j'aime les voitures.

3) Le piège était ici que la phrase "Tous les journaux racontent des mensonges" ne signifie pas que les journaux racontent uniquement des mensonges !
En notant J l'ensemble des journaux, $I(j)$ l'ensemble des informations contenues dans J et M l'ensemble des mensonges, on peut traduire la précédente phrase par :

$$\forall j \in J, \exists i \in I(j), i \in M.$$

Et en notant i_0 l'information dont on parle, on peut traduire la 1ère phrase par :

$$\exists j \in J, i_0 \in I(j).$$

On voit dès lors que l'on ne peut rien conclure de ces deux propositions ! C'est donc un sophisme, et on ne peut rien dire sur la valeur de vérité de la conclusion.

4) G : ensemble des grenouilles, C : ensemble des canards et P : ensemble des poètes.
Les deux premières propositions se traduisent par :

① $\forall x \in G, x \notin P.$
② $\exists x \in C, x \notin P.$

Là encore, impossible de conclure : c'est un sophisme.

5) A : ensemble des aigles, C : ensemble des cochons et V : ensemble des animaux volants.

On traduit les deux premières phrases par :

① $\forall x \in A, x \in V$.

② $\exists x \in C, x \notin V$.

Or ① $\Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in V)$

$\Leftrightarrow (x \notin V \Rightarrow x \notin A)$ (contraposée)

Donc ② $\Rightarrow (\exists x \in C, x \notin A)$ (car $x \notin V \Rightarrow x \notin A$)

<u>La conclusion donnée est donc vraie!</u>

Exercice 13:

Soit B l'ensemble des bébés, I l'ensemble des gens illogiques, M l'ensemble des gens méprisés et C l'ensemble des gens qui peuvent venir à bout d'un crocodile. On notera enfin Ω l'ensemble des êtres humains.

Traduction mathématique des 3 propositions :

① $\forall b \in B,\ b \in I$.

② $\forall e \in \Omega,\ e \in C \Rightarrow e \notin M$.

③ $\forall e \in I,\ e \in M$.

Or on a les équivalences suivantes :

$$① \Leftrightarrow (\forall e \in \Omega,\ e \in B \Rightarrow e \in I)$$
$$\Leftrightarrow (\forall e \in \Omega,\ e \notin I \Rightarrow e \notin B) \quad \text{(contraposée)}$$

et

$$③ \Leftrightarrow (\forall e \in \Omega,\ e \in I \Rightarrow e \in M)$$
$$\Leftrightarrow (\forall e \in \Omega,\ e \notin M \Rightarrow e \notin I) \quad \text{(contraposée)}$$

Donc $\forall e \in \Omega, \begin{cases} e \in C \Rightarrow e \notin M & \text{(grâce à ②)} \\ e \notin M \Rightarrow e \notin I & \text{(grâce à ③)} \\ e \notin I \Rightarrow e \notin B & \text{(grâce à ①)} \end{cases}$

Conclusion : $\forall e \in \Omega,\ e \in C \Rightarrow e \notin B$.

Autrement dit si quelqu'un vient à bout d'un crocodile, c'est que ce n'est pas un bébé !

Exercice 14 :

Pour traduire l'énoncé en implications mathématiques, donnons tout d'abord un nom aux propositions suivantes :

- P_A : "Je fais attention à l'animal A."
- Q_A : "L'animal A est mortellement offensé."
- R_A : "L'animal A m'appartient."
- S_A : "L'animal A est dans le pré."
- T_A : "L'animal A sait résoudre des devinettes."
- U_A : "L'animal A a reçu une formation convenable dans une école."
- V_A : "L'animal A est un raton-laveur."
- W_A : "L'animal A se met à courir en tout sens et à hurler."

Et désignons par Ω l'ensemble des animaux.
On peut maintenant traduire les 7 assertions :

1. $\forall A \in \Omega$, $\text{non}(P_A) \Rightarrow Q_A$.
2. $\forall A \in \Omega$, $R_A \Rightarrow S_A$.
3. $\forall A \in \Omega$, $\text{non}(U_A) \Rightarrow \text{non}(T_A)$.
4. $\forall A \in \Omega$, $S_A \Rightarrow \text{non}(V_A)$.
5. $\forall A \in \Omega$, $Q_A \Rightarrow W_A$.
6. $\forall A \in \Omega$, $\text{non}(R_A) \Rightarrow \text{non}(P_A)$.
7. $\forall A \in \Omega$, $U_A \Rightarrow \text{non}(W_A)$.

En essayant de trouver la plus longue chaîne d'implications possible, on remarque que l'on peut combiner les propositions ⑥, ①, ⑤, la contraposée de ⑦ et la proposition ③, on obtient $\forall A \in \mathcal{R}$:

$$\text{non}(R_A) \Rightarrow \text{non}(P_A) \Rightarrow Q_A \Rightarrow W_A \Rightarrow \text{non}(U_A) \Rightarrow \text{non}(T_A).$$

Donc $\boxed{\text{non}(R_A) \Rightarrow \text{non}(T_A).}$

Par ailleurs, en regardant les assertions non utilisées, on voit que la combinaison de ② et ④ donne :

$$R_A \Rightarrow S_A \Rightarrow \text{non}(V_A)$$

Donc $\boxed{R_A \Rightarrow \text{non}(V_A).}$

Cela ressemble à une disjonction de (2) cas. Formalisons-le en notant $P = R_A$, $Q = \text{non}(R_A)$ et $T = (\text{non}(V_A) \text{ ou } \text{non}(T_A))$.

On a alors :

- $(P \text{ ou } Q)$ forcément <u>vraie</u> puisque soit P soit Q est vraie
- $P \Rightarrow T$ $\overset{\text{vraie}}{V}$ puisque $R_A \Rightarrow \text{non}(V_A) \Rightarrow \text{non}(V_A \text{ ou } \text{non}(T_A))$.
- $Q \Rightarrow T$ $\overset{\text{vraie}}{V}$ car $\text{non}(R_A) \Rightarrow \text{non}(T_A) \Rightarrow \text{non}(V_A \text{ ou } \text{non}(T_A))$.

Or on sait que la propriété (admise) de la disjonction de 2 cas nous affirme que :

$$\big[(P \text{ ou } Q) \text{ et } (P \Rightarrow T) \text{ et } (Q \Rightarrow T)\big] \Rightarrow T$$

On en déduit alors que <u>T est vraie</u>.

Or $T = \text{non}(V_A) \text{ ou } \text{non}(T_A)$ et d'après les lois de Morgan :

$\left(\text{non}(V_A) \text{ ou non}(T_A)\right) \Longleftrightarrow \text{non}(V_A \text{ et } T_A)$

Donc $\left(\text{non}(V_A \text{ et } T_A)\right)$ est vraie, autrement dit :

$\underline{(V_A \text{ et } T_A) \text{ est fausse}}$.

Autrement dit : <u>un raton-laveur ne sait pas résoudre des devinettes!</u>