Corrigé Feuille n°2

Exercice 1 :

1) I : " n pair $\Longrightarrow n^2$ pair ".

- non(I) : " n pair et n^2 impair "
  car $I = (P \Longrightarrow Q)$ avec P : " n pair " et Q : " n^2 pair ".
  or $(P \Longrightarrow Q) \Longleftrightarrow (\text{non}(P) \text{ ou } Q)$
  donc $(\text{non}(P \Longrightarrow Q)) \Longleftrightarrow (P \text{ et non}(Q))$ d'après les lois de Morgan.
- Contraposée de $P \Rightarrow Q$: $\text{non}(Q) \Longrightarrow \text{non}(P)$
  Donc ici : " n^2 impair $\Longrightarrow n$ impair ".
- Réciproque de $P \Longrightarrow Q$: $Q \Longrightarrow P$.
  Ici, on a donc : " n^2 pair $\Longrightarrow n$ pair ".

2) a)
$$\begin{aligned}
\text{non}(P \Longrightarrow (Q \text{ et } R)) &\Longleftrightarrow \text{non}(\text{non}(P) \text{ ou } (Q \text{ et } R)) \\
(\text{Morgan}) &\Longleftrightarrow (\text{non}(\text{non}(P)) \text{ et non}(Q \text{ et } R)) \\
(\text{Morgan}) &\Longleftrightarrow (P \text{ et } (\text{non}(Q) \text{ ou non}(R))) \\
(\text{distributivité}) &\Longleftrightarrow ((P \text{ et non}(Q)) \text{ ou } (P \text{ et non}(R)))
\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}
\text{non}(P \Longrightarrow (Q \Longrightarrow R)) &\Longleftrightarrow \text{non}(\text{non}(P) \text{ ou } (\text{non}(Q) \text{ ou } R)) \\
(\text{associativité}) &\Longleftrightarrow \text{non}(\text{non}(P) \text{ ou non}(Q) \text{ ou } R) \\
(\text{Morgan}) &\Longleftrightarrow (P \text{ et } Q \text{ et non}(R))
\end{aligned}$$

c) $\text{non}(P \text{ ou non}(\text{non}(Q) \text{ et } R)) \overset{\text{(Morgan)}}{\Longleftrightarrow} \text{non}(P \text{ ou}(\text{non}(\text{non}(Q) \text{ ou non}(R))))$

$\Longleftrightarrow \text{non}(P \text{ ou } (Q \text{ ou non}(R)))$

(associativité) $\Longleftrightarrow \text{non}(P \text{ ou } Q \text{ ou non}(R))$

(Morgan) $\Longleftrightarrow (\text{non}(P) \text{ et non}(Q) \text{ et non}(\text{non}(R)))$

$\Longleftrightarrow \underline{(\text{non}(P) \text{ et non}(Q) \text{ et } R)}.$

Exercice 2 :

1) Table de vérité :

P	Q	R	P ou Q	(P ou Q) ⇒ R	P ⇒ R	Q ⇒ R	(P ⇒ R) et (Q ⇒ R)
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	F
V	F	V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F	V	F
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	V	F	F
F	F	V	F	V	V	V	V
F	F	F	F	V	V	V	V

ok

Sans table de vérité : (facultatif)

$((P \text{ ou } Q) \Rightarrow R) \Longleftrightarrow (\text{non}(P \text{ ou } Q) \text{ ou } R)$

$\Longleftrightarrow ((\text{non}(P) \text{ et non}(Q)) \text{ ou } R)$ (Morgan)

$\Longleftrightarrow (\text{non}(P) \text{ ou } R) \text{ et } (\text{non}(Q) \text{ ou } R)$ (distributivité)

$\Longleftrightarrow ((P \Rightarrow R) \text{ et } (Q \Rightarrow R))$ ok

2) Table de vérité :

T	P	Q	R	P ou Q ou R	P ⇒ T	Q ⇒ T	R ⇒ T	(1) (P ou Q ou R) et (P ⇒ T) et (Q ⇒ T) et (R ⇒ T)	(1) ⇒ T
V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
F	V	V	V	V	F	F	F	F	V
V	V	V	F	V	V	V	V	V	V
F	V	V	F	V	F	F	V	F	V
V	V	F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	V	F	V	F	F	V
V	V	F	F	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	V	F	V	V	F	V
V	F	V	V	V	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V	F	F	F	V
V	F	V	F	V	V	V	V	V	V
F	F	V	F	V	V	F	V	F	V
V	F	F	V	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	F	F	V
V	F	F	F	F	V	V	V	F	V
F	F	F	F	F	V	V	V	F	V

L'implication à démontrer est donc tout le temps vraie.

Exercice 3 :

1) $x \in \mathbb{R}$, P : "$x^4 = 81$", Q : "$x = 3$ ou $x = -3$".
On voit déjà que $3^4 = (-3)^4 = 81$, donc $Q \Rightarrow P$.
Mais $x^4 = 81 \Rightarrow x^4 - 81 = 0$
$\Rightarrow (x^2-9)(x^2+9) = 0$
$\Rightarrow (x-3)(x+3)(x^2+9) = 0$
$\Rightarrow x - 3 = 0$ ou $x + 3 = 0$ ou $\underbrace{x^2+9=0}_{\text{impossible car } x^2+9>0}$.
$\Rightarrow x = 3$ ou $x = -3$.
Donc $P \Rightarrow Q$ aussi.
Bilan : $P \Leftrightarrow Q$ et donc P est une condition nécessaire et suffisante pour Q.

2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, P : "f continue en 0", Q : "f dérivable en 0".
On sait qu'une fonction dérivable en un point est nécessairement continue en ce point.
Donc $Q \Rightarrow P$.
Mais $P \Rightarrow Q$ est fausse, comme le prouve le contre-exemple suivant : $f : x \mapsto f(x) = |x|$,
f continue en 0 mais non dérivable en 0.
Bilan : $Q \Rightarrow P$ et donc P est une condition nécessaire pour Q.

3) $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, P : "$x > 0$ et $y > 0$", Q : "$xy > 0$".
On a évidemment $P \Rightarrow Q$ puisque si $x > 0$ et $y > 0$, alors $xy > 0$.
En revanche, $xy > 0 \Rightarrow (x > 0$ et $y > 0)$ ou $(x < 0$ et $y < 0)$.
Donc $Q \Rightarrow P$ est fausse.

Bilan : $P \Rightarrow Q$ et donc P est une condition suffisante pour Q.

Exercice 4 :

1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bornée $\iff \left[\exists M \in \mathbb{R}_+, \forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq M \right]$

$\left[\text{ou bien} : \exists (m, M) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R}, m \leq f(x) \leq M \right]$.

2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non bornée $\iff \left[\forall M \in \mathbb{R}_+, \exists x \in \mathbb{R}, |f(x)| > M \right]$

(négation du 1))

3) f ne s'annule jamais $\iff \left[\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0 \right]$.

4) f n'est pas la fonction nulle $\iff \left[\exists x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0 \right]$.

Exercice 5 :

P : $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(x + y > 0)$.

On peut aussi écrire P : $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y > 0$.

⚠ P se lit : "il existe un réel x tel que pour tout y réel, on a $x+y$ strictement positif".

non(P) : $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y \leq 0$.

⚠ non(P) se lit : "pour tout x réel, il existe un réel y tel que $x+y$ négatif."

Déjà, on voit que P est fausse car si elle était vraie, en prenant $y = -x$ (ce que l'on a le droit de faire puisque $x + y > 0$ doit être vrai pour tout $y \in \mathbb{R}$), on aurait $x + (-x) > 0$, soit $0 > 0$ ce qui est absurde. On voit donc grâce à ce mini-raisonnement par l'absurde que P est bien fausse. Cela suffit à montrer que non(P) est vraie.

Néanmoins, montrons que non(P) est vraie par analyse-synthèse.

Analyse : soit $x \in \mathbb{R}$ quelconque, essayons de trouver un réel y (dépendant de x) tel que $x + y \leq 0$.

En triturant $x+y \leq 0$, on voit qu'il suffit de prendre un y tel que $y \leq -x$.
Prenons par exemple $y = -x-1$ ($y=-x$ aurait convenu aussi).

<u>Synthèse</u> : Maintenant que l'on a posé $y = -x-1$, vérifions que la propriété $x+y \geq 0$ est vraie dans ce cas.
$x+y = x+(-x-1) = -1 \leq 0$.
On a donc bien prouvé l'<u>existence</u> d'un réel y assurant $x+y \geq 0$, et ce pour un choix <u>initial</u> de x <u>quelconque</u>.

Donc <u>$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x+y \leq 0$.</u>

<u>Exercice 6 :</u>

Afin d'étudier la véracité d'un point de vue logique de la proposition P, il convient tout d'abord de la traduire en termes mathématiques (quantificateurs, liens logiques).

Mais pour ceci, il faut bien voir ici qu'il y a une implication "cachée". En effet, autant le "toute suite de réels" se traduit facilement par "pour toute suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$", autant il faut bien voir que le "qui converge vers 0" se traduit par "si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0", c'est à dire une implication, terminée par "alors elle est décroissante".

<u>Bilan</u> : P $\Leftrightarrow$ "Pour toute suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0 \Rightarrow (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante"

<u>A savoir</u> : L'ensemble des suites réelles se note $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
et l'ensemble des suites complexes $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

Si on note P_{u_n} : " $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ " et Q_{u_n} : " $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante",
l'assertion P s'écrit alors plus simplement :

$$P : \forall (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ P_{u_n} \Rightarrow Q_{u_n}.$$

On en déduit que non(P) s'écrit :

$$\text{non}(P) : \exists (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ P_{u_n} \text{ et non}(Q_{u_n}).$$

L'une des deux est forcément vraie, mais laquelle ? Pour avoir l'intuition de la bonne réponse, le mieux est de tenter de démontrer la plus facile des 2 à démontrer.

<u>A savoir</u> : Il est <u>souvent</u> plus facile de démontrer une proposition commençant par "<u>il existe</u>" qu'une commençant par "pour tout".

Essayons donc de montrer non(P). Il y a alors deux cas de figure : soit on arrive à trouver une suite (u_n) vérifiant P_{u_n} et non(Q_n), et cela suffira à démontrer non(P), soit on n'y arrive pas et cela nous suggère que non(P) est <u>peut-être</u> fausse : il faut donc alors essayer de montrer P.
On cherche donc à trouver une suite (u_n) tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et <u>(u_n) non décroissante</u> (non(Q_{u_n})). On peut par exemple chercher une suite <u>croissante</u> tendant vers 0 lorsque $n \to +\infty$.
Elle sera donc forcément <u>négative</u>. Sans chercher bien loin, on pose alors : $u_n = \dfrac{-1}{n},\ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

On a bien $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{-1}{n}\right) = 0$ et u_n <u>croissante</u>

car $u_{n+1} - u_n = \frac{-1}{n+1} + \frac{1}{n} = \frac{1}{n(n+1)} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

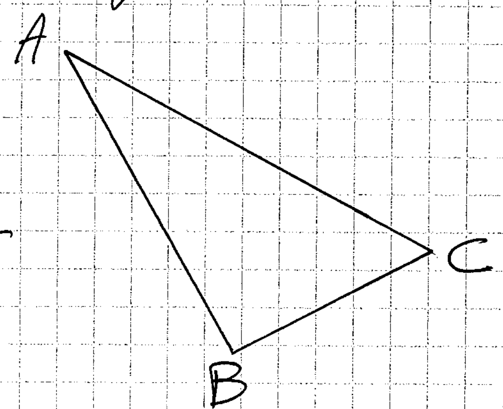
On a donc trouvé une suite (u_n) vérifiant P_{u_n} et non(Q_{u_n}).

Donc <u>non(P) est vraie</u> (et P est fausse).

<u>Exercice 7 :</u>

<u>Par l'absurde</u> : supposons qu'il existe un tel triangle, que l'on nomme ABC. Quitte à changer l'ordre des lettres, on peut supposer que $AB = 4$ cm, $BC = 6$ cm et $AC =$ [illegible] cm.

Or l'inégalité triangulaire sur les longueurs AB, BC et AC nous donne :



$$AC \leq AB + BC$$

(le plus court chemin pour aller de A à C est la ligne droite !)

Or $AC = 11$ cm et $AB + BC = 10$ cm.

Donc $11 \leq 10$, ce qui est <u>absurde</u>.

La supposition de départ était donc <u>fausse</u>.

Donc <u>on ne peut construire un tel triangle</u>.

Exercice 8 :

On note P : "$\forall n \in \mathbb{N}^*$, n^2-1 non divisible par 8 $\Rightarrow$ n pair."
Ici, la démonstration directe de l'implication est complexe. Il est nettement plus facile de la démontrer par <u>contraposée</u>.

On note $\begin{cases} P_n : \text{"}n^2-1 \text{ non divisible par } 8\text{"} \\ Q_n : \text{" } n \text{ pair"}. \end{cases}$

P s'écrit alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P_n \Rightarrow Q_n$.
La contraposée s'écrit donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \text{ non}(Q_n) \Rightarrow \text{non}(P_n).$$

On veut donc montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, <u>si</u> n n'est pas pair (non(Q_n)), autrement dit si n est impair, <u>alors</u> n^2-1 est divisible par 8 (non(P_n)).
On prend donc un $n \in \mathbb{N}^*$ <u>quelconque</u>, et on suppose que n est <u>impair</u> (on aurait pu dire directement : "soit n un entier naturel impair quelconque").

Alors $\exists k \in \mathbb{N}$, $n = 2k+1$.

Donc $n^2-1 = (2k+1)^2-1$

$$\Rightarrow n^2-1 = 4k^2+4k+1-1 = 4k^2+4k$$
$$= 4k(k+1).$$

A ce stade, il y a deux possibilités :
① <u>k est impair</u> : $k = 2k'+1$ avec $k' \in \mathbb{N}$.
Donc $k(k+1) = (2k'+1)(2k'+2) = 2(2k'+1)(k'+1)$
$$\Rightarrow n^2-1 = 4\times 2(2k'+1)(k'+1) = 8(k'+1)(2k'+1).$$

② k est pair : $\exists k' \in \mathbb{N}, k = 2k'$.

Alors $k(k+1) = 2k'(2k'+1)$.

Donc $n^2 - 1 = 8k'(2k'+1)$.

Bilan : Dans les 2 cas, n^2-1 s'écrit $8k''$ où k'' est un entier naturel.

Donc dans tous les cas, n^2-1 est divisible par 8.

On vient de prouver non (P_n), ce qui clôt notre raisonnement par contraposée : P est démontrée.

Exercice 9 :

On va ici utiliser la disjonction de cas, entrevue à l'exercice précédent. Le principe est simple : on recense tous les cas possibles pour une variable, et on montre que dans chacun de ces cas, une propriété T est vraie : ceci suffit pour dire que T est vraie tout le temps, grâce à l'assertion démontrée à l'exercice 2 :

$$\left[(P \text{ ou } Q \text{ ou } R) \text{ et } (P \Rightarrow T) \text{ et } (Q \Rightarrow T) \text{ et } (R \Rightarrow T)\right] \Rightarrow T.$$

Identifions P, Q, R et T dans le cadre de l'exercice. On veut démontrer que $(\forall x \in \mathbb{R}, (f(x) \geq 0 \text{ ou } g(x) \geq 0))$. On va donc recenser tous les cas possibles sur les valeurs de x, en se servant du "découpage de $\mathbb{R}$" utilisé pour définir f.

On distinguera donc <u>3 cas</u>, qui seront nos propositions P, Q et R :

P : $x \geq 1$, (1^{er} cas)

Q : $x \in [0,1]$, ($2^{ème}$ cas)

R : $x < 0$. ($3^{ème}$ cas)

On va maintenant regarder <u>dans chaque cas</u> si la propriété T : "$f(x) \geq 0$ ou $g(x) \geq 0$" est <u>vraie</u>.

. <u>1^{er} cas</u> : <u>On suppose P</u>, c'est à dire on suppose que $x \geq 1$.

Alors dans ce cas :

$$f(x) = x^2 - 1 \text{ et } g(x) = x(x-3).$$

Or si $x \geq 1$, $x^2 \geq 1$ et donc $x^2 - 1 \geq 0$.

Ainsi, dans ce cas, $f(x) \geq 0$, ce qui prouve que <u>T est vérifiée dans ce cas</u>.

. <u>$2^{ème}$ cas</u> : <u>On suppose Q</u>, c'est à dire $x \in [0,1]$. Alors :

$$f(x) = 1 - x \text{ et } g(x) = x(x-3).$$

Or si $x \in [0,1]$, alors $1 - x \in [0,1]$ aussi.

Donc $f(x) \geq 0$, et <u>T est vérifiée dans ce cas.</u>

. <u>$3^{ème}$ cas</u> : <u>On suppose R</u>, c'est à dire $x < 0$. Alors :

$$f(x) = x \text{ et } g(x) = x(x-3).$$

Ici, on voit bien que $f(x) < 0$.

Mais $x < 0$ donc $x - 3 < 0$.

Donc $g(x) = x(x-3) > 0$.

Ceci <u>prouve T dans ce cas aussi</u>.

Maintenant, il faut bien voir qu'il n'y a pas de 4ème cas possible : soit P vérifiée, soit Q est vérifiée, soit R est vérifiée.

Bilan : (P ou Q ou R) est toujours vrai ici.

A ceci, on rajoute les implications que l'on vient de démontrer dans chaque cas :

- $P \Rightarrow T$ est vraie
- $Q \Rightarrow T$ est vraie
- $R \Rightarrow T$ est vraie

Bilan : $[(P \text{ ou } Q \text{ ou } R) \text{ et } (P \Rightarrow T) \text{ et } (Q \Rightarrow T) \text{ et } (R \Rightarrow T)]$ est vraie.

On utilise alors la proposition que l'on a démontrée à l'exercice 2 (on peut donc s'en servir) : la première partie de l'implication est vraie, donc la seconde l'est aussi.

Conclusion : T est vraie, c'est à dire : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0$ ou $g(x) \geq 0$.

N.B. : la disjonction de cas fonctionne avec n'importe quel nombre entier de cas (2, 3, 4, 5 ...).

Exercice 10 :

On note P_n : " $2 \leq u_n \leq 10$ ". On veut montrer que P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, via un raisonnement par récurrence.

① Initialisation : $n = 0$.

On a $u_0 = 10$ donc on a bien $2 \leq u_0 \leq 10$.

Donc P_0 est vraie.

② Hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé et quelconque. On suppose P_n vraie.

Montrons P_{n+1}.

P_n est vraie donc $2 \leq u_n \leq 10$,

$$\Rightarrow 1 \leq \frac{1}{2} u_n \leq 5,$$

$$\Rightarrow 2 \leq \frac{1}{2} u_n + 1 \leq 6,$$

$$\Rightarrow 2 \leq u_{n+1} \leq 6.$$

Or $6 \leq 10$, donc $2 \leq u_{n+1} \leq 10$, ce qui prouve P_{n+1}.

③ Bilan : La propriété P_n est vraie au rang $n=0$, et héréditaire.

Par récurrence, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 2 \leq u_n \leq 10.}$

Exercice 11 :

Testons la proposition sur les premiers entiers :

- $n=0$: $2^0=1$ et $0^2=0$, donc $2^0 \geq 0^2 \to$ ok à $n=0$.
- $n=1$: $2^1=2$ et $1^2=1$, donc $2^1 \geq 1^2 \to$ vraie à $n=1$.
- $n=2$: $2^2=4$ et $2^2=4$, donc $2^2 \geq 2^2 \to$ ok pour $n=2$.
- $n=3$: $2^3=8$ et $3^2=9$, donc $2^3 < 3^2 \to$ fausse à $n=3$.
- $n=4$: $2^4=16$ et $4^2=16$, donc $2^4 \geq 4^2 \to$ ok à $n=4$.
- $n=5$: $2^5=32$ et $5^2=25$, donc $2^5 \geq 5^2 \to$ ok à $n=5$.
- $n=6$: $2^6=64$ et $6^2=36$, donc $2^6 \geq 6^2 \to$ ok à $n=6$.
- $n=7$: $2^7=128$ et $7^2=49$, donc $2^7 \geq 7^2 \to$ ok à $n=7$.

Bilan : La propriété semble vraie pour $n \geq 4$ puisque l'écart entre 2^n et n^2 semble grandir lorsque n grandit.

Donc "$\forall n \in \mathbb{N}$, $2^n \geq n^2$" est fausse.

(contre-exemple : $n=3$)

Mais "$\forall n \geq 4$, $2^n \geq n^2$" semble vraie.

Démontrons-la par récurrence !

① Initialisation : $n=4$ (puisque l'on commence à $n=4$)

On a vu que $2^4 \geq 4^2$, donc la propriété est vraie pour $n=4$.

② Hérédité : soit $n \geq 4$ fixé et quelconque, on suppose P_n vraie.

Alors $2^n \geq n^2$.

Donc $2^{n+1} \geq 2n^2$.

Or $(n+1)^2 - 2n^2 = (n+1-\sqrt{2}n)(n+1+\sqrt{2}n) = (1+(1-\sqrt{2})n)(1+(1+\sqrt{2})n)$

Et $\begin{cases} 1+(1+\sqrt{2})n \geq 0 & (\text{car } n \in \mathbb{N}) \\ 1+(1-\sqrt{2})n \leq 0 & (\text{car } 1-\sqrt{2} \simeq -0{,}4142 < 0 \text{ et } n \geq 4) \end{cases}$

Donc $(1+(1-\sqrt{2})n)(1+(1+\sqrt{2})n) \leq 0$.
Ainsi, $(n+1)^2 - 2n^2 \leq 0$, et donc $2n^2 \geq (n+1)^2$.
Revenons à $2^{n+1} \geq 2n^2$, on en déduit alors que :
$$2^{n+1} \geq (n+1)^2,$$
ce qui <u>prouve P_{n+1}</u>.
La propriété est donc <u>héréditaire</u>.

③ <u>Bilan</u>: par récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \geq 4$.

Donc $\boxed{\forall n \geq 4,\ 2^n \geq n^2.}$