

Feuille d'exercices n°2

Exercice 1

1. Soit la proposition $I : "n \text{ pair} \implies n^2 \text{ pair}"$.
Écrire la négation, la contraposée puis la réciproque de I .
2. Soient P, Q et R trois propositions. Nier les assertions suivantes (c'est à dire donner leur négation) :
 - (a) $P \implies (Q \text{ et } R)$
 - (b) $P \implies (Q \implies R)$
 - (c) $P \text{ ou non}(\text{non } Q \text{ et } R)$

Exercice 2

Soient P, Q, R et T quatre propositions. Démontrer les assertions suivantes (avec ou sans table de vérité) :

1. $((P \text{ ou } Q) \implies R) \Leftrightarrow ((P \implies R) \text{ et } (Q \implies R))$
2. La disjonction de 3 cas : $[(P \text{ ou } Q \text{ ou } R) \text{ et } (P \implies T) \text{ et } (Q \implies T) \text{ et } (R \implies T)] \implies T$

Exercice 3

Quel lien logique existe-t-il entre les propositions P et Q suivantes? Dire si P est une condition nécessaire, suffisante, ou nécessaire et suffisante pour Q .

1. Soit x un réel. $P : "x^4 = 81"$ et $Q : "x = 3 \text{ ou } x = -3"$
2. Soit f une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . $P : f$ est une fonction continue en $x = 0$, $Q : f$ est une fonction dérivable en $x = 0$.
3. Soient deux réels x et y . $P : x > 0$ et $y > 0$. $Q : xy > 0$.

Exercice 4

Traduire en langage quantifié les assertions suivantes.

1. La fonction f définie de \mathbb{R} dans \mathbb{R} est bornée.
2. La fonction f définie de \mathbb{R} dans \mathbb{R} n'est pas bornée.
3. La fonction f définie de \mathbb{R} dans \mathbb{R} ne s'annule jamais.
4. La fonction f définie de \mathbb{R} dans \mathbb{R} n'est pas la fonction nulle.

Exercice 5

Ecrire la négation de l'assertion suivante et démontrer celle parmi les 2 qui est vraie :

$$(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(x + y > 0).$$

Exercice 6 (Raisonnement par contre-exemple)

Etudier la véracité de l'assertion P suivante :

P : Toute suite de réels qui converge vers 0 est décroissante.

Exercice 7 (Raisonnement par l'absurde)

Démontrer que l'on ne peut pas construire un triangle dont les côtés mesurent respectivement 4cm, 6cm et 11cm. *Indice : utiliser l'inégalité triangulaire.*

Exercice 8 (Raisonnement par contraposée)

Démontrer la propriété suivante : $\forall n \in \mathbb{N}^*, n^2 - 1$ non divisible par 8 $\Rightarrow n$ pair.

Exercice 9 (Raisonnement par disjonction de cas)

Soit pour tout réel x , $g(x) = x(x - 3)$ et $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \geq 1 \\ 1 - x & \text{si } x \in [0, 1] \\ x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R})(f(x) \geq 0 \text{ ou } g(x) \geq 0)$.

Exercice 10 (Raisonnement par récurrence)

On considère la suite $(u_n)_n$ définie par $u_0 = 10$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, 2 \leq u_n \leq 10$.

Exercice 11 (Raisonnement par récurrence)

Est-il vrai que $\forall n \in \mathbb{N}, 2^n \geq n^2$?

Exercice 12 Vrai ou faux ?

Examiner la valeur de vérité des syllogismes suivants.

1. Aucun docteur n'est enthousiaste. Vous êtes enthousiaste. Donc vous n'êtes pas docteur.
2. Quelques gourmets manquent de générosité. Tous mes oncles sont généreux. Donc mes oncles ne sont pas des gourmets.
3. J'ai lu cette information dans un journal. Tous les journaux racontent des mensonges. Donc cette information est un mensonge.
4. Aucune grenouille n'est poète. Quelques canards ne sont pas poètes. Donc quelques canards ne sont pas des grenouilles.
5. Tous les aigles peuvent voler. Quelques cochons ne peuvent pas voler. Donc quelques cochons ne sont pas des aigles.

Exercice 13 Une histoire de bébé.

Que peut-on déduire de l'ensemble des propositions suivantes, que l'on supposera vraies :

1. Les bébés sont illogiques.
2. Nul n'est méprisé lorsqu'il peut venir à bout d'un crocodile.
3. Les gens illogiques sont méprisés.

Exercice 14 Une histoire de raton-laveur.

On donne les assertions suivantes, supposées vraies :

1. Les animaux sont toujours mortellement offensés si je ne fais pas attention à eux
2. Les seuls animaux qui m'appartiennent se trouvent dans ce pré
3. Aucun animal ne peut résoudre une devinette s'il n'a reçu une formation convenable dans une école
4. Aucun des animaux qui se trouvent dans ce pré n'est un raton-laveur
5. Quand un animal est mortellement offensé, il se met toujours à courir en tout sens et à hurler
6. Je ne fais jamais attention à un animal qui ne m'appartient pas
7. Aucun animal qui a reçu dans une école une formation convenable ne se met à courir en tout sens et à hurler

Que peut-on en déduire ?

Indication : on pourra traduire chaque assertions en langage mathématique et rechercher une suite d'implications.

Les trois exercices précédents sont tirés de "La logique sans peine" de Lewis Carroll (Hermann, 1982) dont la première édition date de 1896.