Corrigé Feuille n°1

Exercice 1 :

1) Il faut commencer par traiter la valeur absolue, et séparer la résolution en 2 cas, suivant que $2x-1 \geq 0$ ou non.

1er cas : on suppose $2x-1 \geq 0$, c'est à dire $x \geq \frac{1}{2}$.

Alors $|2x-1| = 2x-1$, et donc :

$$|2x-1| = 9x+2 \iff 2x-1 = 9x+2$$
$$\iff 7x = -3$$
$$\iff x = \frac{-3}{7}.$$

Mais on a supposé $x \geq \frac{1}{2}$, et $\frac{-3}{7} < \frac{1}{2}$.

Il n'y a donc pas de solution dans ce cas !

2ème cas : on suppose $2x-1 < 0$, c'est à dire $x < \frac{1}{2}$.

Alors $|2x-1| = 1-2x$, et :

$$|2x-1| = 9x+2 \iff 1-2x = 9x+2$$
$$\iff 11x = -1$$
$$\iff x = \frac{-1}{11}.$$

La solution trouvée vérifie bien $x < \frac{1}{2}$,

il y a donc une unique solution dans ce cas : $x = \frac{-1}{11}$

Bilan : $\boxed{\mathcal{S} = \left\{\frac{-1}{11}\right\}}$ ($\mathcal{S}$: ensemble des solutions)

2) $x^2-3x-4=0$ est une équation du 2^{nd} degré.
Calculons Δ : $\Delta = 3^2 - 4\times 1\times(-4) = 25 = 5^2 > 0$.
Donc les solutions x_1 et x_2 sont réelles et distinctes :

$$x_1 = \frac{3+5}{2} \text{ et } x_2 = \frac{3-5}{2}$$

$$\Leftrightarrow x_1 = 4 \text{ et } x_2 = -1.$$

Donc $\boxed{\mathcal{S} = \{-1, 4\}}$

N.B. : on aurait aussi pu remarquer que -1 était solution évidente, puis déduire la seconde grâce à la formule $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$ donnant le produit des 2 racines d'un polynôme du 2^{nd} degré en fonction des coefficients (cf cours sur les polynômes). Ici, $\frac{c}{a} = -4$ donc $x_2 = 4$.

3) $20x + \pi \leq 5x - e$

$\Leftrightarrow 15x \leq -\pi - e$

$\Leftrightarrow x \leq \frac{-\pi-e}{15}$ car $15 > 0$

Donc $\boxed{\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R} / x \leq \frac{-\pi-e}{15}\} =]-\infty, \frac{-\pi-e}{15}]}$

4) Dans ce type d'équation, où l'inconnue x est "enfermée" dans un logarithme, il faut impérativement "passer à l'exponentielle", c'est à dire appliquer la fonction exponentielle $x \longmapsto e^x$ aux deux côtés de l'équation :

$$\ln(2x+1) = 1 \Leftrightarrow e^{\ln(2x+1)} = e^1$$

$\Leftrightarrow 2x+1 = e$

(puisque $e^{\ln(X)} = \ln(e^X) = X$ car exponentielle et logarithme népérien sont des fonctions réciproques)

$\Leftrightarrow x = \dfrac{e-1}{2}$.

⚠ Il faut ici vérifier que la solution trouvée vérifie bien $2x+1 > 0$ afin que $\ln(2x+1)$ soit bien défini ! Rappel : $x \mapsto \ln(x)$ n'est défini que sur $\mathbb{R}_+^* =]0,+\infty[$.

⚠ Ici, $2x+1 = e > 0$ avec la valeur trouvée, c'est bon !

5) $\cos(3x) = \dfrac{1}{2}$: l'idée ici n'est pas d'appliquer la fonction arccos (réciproque de cos) mais de réécrire $\dfrac{1}{2}$ comme un cosinus de quelque chose, puis de résoudre une équation du type $\cos(a) = \cos(b)$.

__Rappel__ : $\cos(a) = \cos(b) \Leftrightarrow a = b \; [2\pi]$ (modulo 2π)

$\boxed{\text{ou}}$ $a = -b \; [2\pi]$

Donc ici, on se __rappelle__ que $\dfrac{1}{2} = \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$.

Donc $\cos(3x) = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \cos(3x) = \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$

$\Leftrightarrow 3x = \dfrac{\pi}{3} \; [2\pi]$ __ou__ $3x = \dfrac{-\pi}{3} \; [2\pi]$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{9} \; \left[\dfrac{2\pi}{3}\right]$ __ou__ $x = \dfrac{-\pi}{9} \; \left[\dfrac{2\pi}{3}\right]$.

Donc $\boxed{\mathcal{S} = \left\{\dfrac{\pi}{9} + \dfrac{2k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\dfrac{-\pi}{9} + \dfrac{2k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}\right\}}$

"où" __union__ "où"

Exercice 2 :

1/ Soit $x \in \mathbb{R}$:

$$A(x) = (2x-3)(x+5) - (2x-3)^2$$
$$= (2x-3)\left[x+5-(2x-3)\right]$$
$$= (2x-3)(-x+8)$$

Donc $A(x) = 0 \iff (2x-3)(-x+8) = 0$

$\iff 2x-3=0$ $\boxed{\text{ou}}$ $-x+8=0$

$\iff x = \frac{3}{2}$ $\boxed{\text{ou}}$ $x = 8$.

Donc $\boxed{S = \left\{\frac{3}{2} ; 8\right\}}$

2/ Soit $x \in \mathbb{R}$:

$$A(x) = (3x-1)^2 - (x+1)^2$$
$$= \left[(3x-1)-(x+1)\right]\left[(3x-1)+(x+1)\right]$$
$$= (2x-2)(4x)$$
$$= 8x(x-1).$$

Donc $A(x) = 0 \iff 8x(x-1) = 0$

$\iff 8x = 0$ $\boxed{\text{ou}}$ $x-1=0$

$\iff x = 0$ $\boxed{\text{ou}}$ $x = 1$.

D'où $\boxed{S = \{0, 1\}}$

3/ Soit $x \in \mathbb{R}$:

$A(x) = 9x^2 - 6x + 1 = (3x-1)^2.$

Donc $A(x) = 0 \iff (3x-1)^2 = 0 \iff 3x-1=0 \iff x = \frac{1}{3}.$

d'où $\boxed{S = \left\{\frac{1}{3}\right\}}$

4) Soit $x \in \mathbb{R}$:

$$A(x) = x^4 - 81 = (x^2-9)(x^2+9)$$
$$= (x-3)(x+3)(x^2+9)$$

Donc $A(x) = 0 \iff (x-3)(x+3)(x^2+9) = 0$

$$\iff x - 3 = 0 \ \boxed{\text{ou}} \ x+3=0 \ \boxed{\text{ou}} \ \underbrace{x^2+9=0}_{\text{impossible !}}$$

(car $x^2+9>0, \forall x \in \mathbb{R}$)

$$\iff x = 3 \ \boxed{\text{ou}} \ x = -3.$$

D'où $\boxed{S = \{-3, 3\}}$.

Exercice 3 :

1/ $z_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$ et $z_1 = 2ie^{2i\pi/3}$

Donc $|z_0| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}} = \sqrt{1} = 1.$

d'où $\boxed{|z_0| = 1}$.

$z_1 = 2ie^{2i\pi/3} = 2i\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$
$= \left(2i\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) - 2\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$
$= -2\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) + 2i\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

Or $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{-1}{2}$ et $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Donc $z_1 = -\sqrt{3} - i$ (forme algébrique de z_1).

Il fallait ici commencer par trouver la forme algébrique de z_1 qui n'était ni sous cette forme ni sous forme trigonométrique / exponentielle.

D'où $|z_1| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} \Leftrightarrow \boxed{|z_1| = 2}$.

Pour trouver $\arg(z_0)$ et $\arg(z_1)$, il faut mettre z_0 et z_1 sous forme trigonométrique (ou alors utiliser les formules $\cos(\arg(z)) = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\sin(\arg(z)) = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ où $z = a+ib$ mais c'est moins formateur) :

$z_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} = \underbrace{1}_{=|z_0|} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)$ (il faut commencer par factoriser par $|z_0|$, ce qui ne change rien ici car $|z_0| = 1$)

$\Leftrightarrow z_0 = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$

Ici, il fallait reconnaître $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$!

La forme trigonométrique de z_0 est donc :

$$z_0 = 1.\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

(et sa forme exponentielle : $z_0 = e^{i\pi/6}$).

On en déduit : $\boxed{\arg(z_0) = \frac{\pi}{6}}$.

N.B. : Dans le cours, on a (par abus de langage) confondu la forme trigonométrique et la forme exponentielle. Si l'on veut être rigoureux, la forme trigonométrique d'un nombre complexe de module ρ et d'argument θ est :

$$z = \rho\left(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\right)$$

tandis que sa forme exponentielle est :

$$z = \rho e^{i\theta}.$$

La seule différence est que l'on a remplacé $\cos(\theta) + i\sin(\theta)$ par $e^{i\theta}$ (cf définition de $e^{i\theta}$).

Pour z_1 : $z_1 = -\sqrt{3} - i = \underbrace{2}_{=|z_1|}\left(\frac{-\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)$ (on factorise par $|z_1|$)

Or $\frac{-\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)$ et $\frac{-1}{2} = \sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)$.

Donc $z_1 = 2\left(\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right) = 2e^{i\frac{7\pi}{6}}$.

d'où $\boxed{\arg(z_1) = \frac{7\pi}{6}}$

N.B. : en se rappelant que $i = e^{i\pi/2}$, on obtenait directement $z_1 = 2e^{\frac{i\pi}{2}}e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)} = 2e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{3}\right)}$
$= 2e^{i7\pi/6}$.

2) On a déjà mis z_0 sous forme exponentielle : $\boxed{z_0 = e^{i\pi/6}}$.

3) $z_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$ donc $\boxed{\overline{z_0} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} = e^{-i\pi/6}}$. (*)

et $\frac{1}{z_0} = \frac{1}{e^{i\pi/6}} = e^{-i\pi/6}$ donc $\boxed{\frac{1}{z_0} = \overline{z_0} = e^{-i\pi/6}}$.

et $z_1^3 = \left(2e^{i7\pi/6}\right)^3 = 8e^{3\left(i\frac{7\pi}{6}\right)}$ d'où $\boxed{z_1^3 = 8e^{i\frac{7\pi}{2}}}$.

et $\frac{z_1}{z_0} = \frac{2e^{i7\pi/6}}{e^{i\pi/6}} = 2e^{i\left(\frac{7\pi}{6} - \frac{\pi}{6}\right)}$ d'où $\frac{z_1}{z_0} = 2e^{i\pi}$.

Donc $\boxed{\frac{z_1}{z_0} = -2}$.

<u>N.B.</u> : on voit bien l'intérêt de la forme exponentielle dans cet exercice.

(*) <u>rappel</u> : si $z = \rho e^{i\theta}$ alors $\overline{z} = \rho e^{-i\theta}$.

Exercice 4 :

1) f est définie là où la fonction $x \longmapsto \ln(x)$ est définie.
Rappel : $x \longmapsto \ln(x)$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

Donc $\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R} \,/\, 1-2x > 0\}$

Or $1-2x > 0 \iff x < \frac{1}{2}$.

Donc $\boxed{\mathcal{D}_f = \left]-\infty, \frac{1}{2}\right[}$

2) f est une fonction composée, donc posons :

$$X = 1-2x.$$

On a alors :

$$\lim_{x \to -\infty} (X) = \lim_{x \to -\infty} (1-2x) = +\infty$$

et $\lim_{X \to +\infty} \ln(X) = +\infty$

Donc $\boxed{\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty}$

Et $\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to \frac{1}{2} \\ x < \frac{1}{2}}} (X) = \lim\limits_{\substack{x \to \frac{1}{2} \\ x < \frac{1}{2}}} (1-2x) = 0^+ \\ \lim\limits_{X \to 0^+} \ln(X) = -\infty \end{cases}$ donc $\boxed{\lim\limits_{\substack{x \to \frac{1}{2} \\ x < \frac{1}{2}}} f(x) = -\infty}$

3) f est dérivable sur $\mathcal{D}_f = \left]-\infty, \frac{1}{2}\right[$ en temps que composée de fonctions dérivables, et on a :

$$\forall x \in \mathcal{D}_f, \quad f'(x) = \frac{(1-2x)'}{1-2x} \qquad \left(\text{rappel} : (\ln(u(x)))' = \frac{u'(x)}{u(x)}\right)$$

Donc $\boxed{\forall x \in \left]-\infty, \frac{1}{2}\right[, \ f'(x) = \frac{2}{2x-1}}$.

4) On a donc f' du même signe que $2x-1$.

Or $\forall x \in \left]-\infty, \frac{1}{2}\right[, \ 2x-1 < 0$.

Donc $\boxed{\forall x \in \left]-\infty, \frac{1}{2}\right[, \ f'(x) < 0}$

5) Tableau de variations de f :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

Exercice 5 :

1) $x \longmapsto x^2+x+1$ est un polynôme du 2nd degré, donc défini, continu et dérivable sur $\mathbb{R}$ tout entier.
$x \longmapsto e^x$ est défini, continu et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Donc <u>g est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.</u>

2) $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} (x^2+x+1) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} (e^x) = +\infty \end{cases}$ donc $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty}$.

Et $\lim\limits_{x \to -\infty} \left((x^2+x+1)e^x\right) = \lim\limits_{x \to -\infty} (x^2 e^x)$ car la limite d'un polynôme est toujours donnée par la limite de son terme de plus haut degré.

Mais $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0 \end{cases}$ donc on a une <u>forme indéterminé</u> ! (du type $\infty \times 0$)

<u>A savoir</u> : la fonction exponentielle "l'emporte" sur toute puissance de x ($x \longmapsto x^\alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R}$) lorsque $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$: c'est l'exponentielle qui impose sa limite à x^α.

On a donc ici : $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^2 e^x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (e^x) = 0 \Rightarrow \boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 0}$

3) $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 0$, donc la droite d'équation $\underline{y=0}$ (autrement dit l'axe des abscisses) est <u>asymptote</u> à la courbe représentative de la fonction g au voisinage de $-\infty$ (ou lorsque x tend vers $-\infty$).

4) On a vu que g est dérivable sur $\mathbb{R}$. On a donc $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$g'(x) = (2x+1)e^x + (x^2+x+1)e^x$$

$$\Rightarrow \boxed{g'(x) = (x^2+3x+2)e^x, \forall x \in \mathbb{R}.}$$

Etudions le signe de $h(x) = x^2+3x+2$ sur $\mathbb{R}$.
On remarque que -1 est racine évidente, donc l'autre racine est $\frac{2}{-1} = -2$.
Donc $h(x) = (x+1)(x+2)$.
On en déduit le signe de h, puis de g', ainsi que les variations de g dans le tableau suivant :

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
$x+1$			$-$		0	$+$	
$x+2$		$-$	0		$+$		
$h(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	$3e^{-2}$	$\searrow$	$\frac{1}{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

(car $e^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$)

$g(-2) = 3e^{-2}$
$g(-1) = \frac{1}{e}$

5) On voit sur le tableau de variations de g que :

<u>g est positive sur $\mathbb{R}$.</u>

On aurait aussi pu le voir en remarquant que

$$x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$$

et donc que $x^2+x+1>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

6) On a $\begin{cases} g(-2)=2e^{-2}\simeq 0,406<1, \\ g(-1)=e^{-1}=\frac{1}{e}\simeq 0,368<1. \end{cases}$

On voit sur le tableau de variations que :

$$\begin{cases} \forall x\in\,]-\infty,-2], & 0<g(x)\leq g(-2) \text{ car } g \text{ croissante sur }]-\infty,-2], \\ \forall x\in[-2,-1], & g(-1)\leq g(x)\leq g(-2) \text{ car } g \text{ décroissante sur } [-2,-1] \\ \forall x\in[-1,+\infty[, & g(-1)\leq g(x) \text{ car } g \text{ croissante sur } [1,+\infty[\end{cases}$$

Donc $g(x)=1$ n'a : $\begin{cases} \text{aucune solution sur }]-\infty,-2[\\ \text{aucune solution sur } [-2,-1] \\ \text{une solution unique sur } [1,+\infty[. \end{cases}$

<u>Bilan :</u> l'équation $g(x)=1$ a une seule solution α sur $\mathbb{R}$.

En testant quelques valeurs de x sur $[1,+\infty[$, on voit que $g(0)=1$, donc <u>$\alpha=0$.</u>

Sinon, il aurait fallu procéder par tatonnement en cherchant des x tels que $g(x)<1$ et d'autres x proches des précédents tels que $g(x)>1$.

7) Soit $k(x) = g(x) - e^{x}$. Le signe de k nous donnera la position de $\mathcal{C}_g$ par rapport à $\mathcal{C}_{exp}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $k(x) = (x^2+x+1)e^{x} - e^{x}$.

$\Leftrightarrow k(x) = (x^2+x)e^{x}$

$\Leftrightarrow k(x) = x(x+1)e^{x}$.

Tableau de signes :

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
x			$-$		0	$+$	
$x+1$		$-$	0		$+$		
$k(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

car $e^{x} > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

On a donc :

$$\begin{cases} \text{sur }]-\infty, -1[, \ \mathcal{C}_g \text{ est au-dessus de } \mathcal{C}_{exp}, \\ \text{sur } [-1, 0[, \ \mathcal{C}_g \text{ est au-dessous de } \mathcal{C}_{exp}, \\ \text{sur } [0, +\infty[, \ \mathcal{C}_g \text{ est au-dessus de } \mathcal{C}_{exp}. \end{cases}$$