INSA Toulouse
Cycle Préparatoire IFCI

Module Outils Mathématiques
Regroupement n°1

Logique et Raisonnement

Introduction

En mathématiques, on travaille avec des objets abstraits (nombres, ensembles, applications, vecteurs,...) qui n'ont pas de réalité physique mais qui servent d'intermédiaires de calcul. Pour les utiliser, nous formons des assertions ou propositions logiques sur ces objets qui peuvent être vraies (V) ou fausses (F).

Exemple 0.1. $3 < 5$ *est une assertion vraie.* $3 > 5$ *est une assertion fausse.*
On notera souvent $P,\ Q,\ R, \ldots$ *les assertions.*

Exercice 0.1. *Donner parmi les assertions suivantes celles qui sont vraies ou fausses :*

1. *"3 est un entier pair",*
2. *"*$(10+2)^2 = 144$*",*
3. *"*$i^2 > 0$*".*

L'objet des mathématiques est d'énoncer des assertions vraies, utiles et élégantes.

Une théorie mathématique se définit par la donnée d'assertions que l'on décide vraies, appelées **axiomes** ou **postulats** (ex : postulats d'Euclide et axiomes d'Hilbert).

Dans une **théorie**, on **démontre** que certaines assertions sont vraies **en utilisant les axiomes et des règles de logique**. Ces assertions seront appelées **théorèmes, propositions, propriétés ou lemmes.**

Principe du tiers exclus : Dans la suite, les assertions sont soit vraies, soit fausses, excluant le cas d'assertions indécidables, c'est-à-dire simultanément ni vraies ni fausses.

1 Opérateurs logiques

1.1 Table de vérité

Soit P une assertion dépendant d'une nombre fini $n \in \mathbb{N}$ d'assertions élémentaires (notées A_1, A_2, ..., A_n) qui peuvent être soit vraies soit fausses, et reliées entre elles par des opérateurs logiques.

Définition 1.1. *On appelle* ***tableau de vérité*** *(ou table de vérité) le tableau permettant de recencer toutes les valeurs de vérités possibles pour l'assertion P en fonction de celles des valeurs de vérités de A_1, A_2, ..., A_n.*

Exemple 1.1.

A_1	A_2	A_3	P

1.2 Négation

Définition 1.2. *Si P est une assertion, on définit une nouvelle assertion, la* **négation** *de P, notée "(NON P)" ou "$\neg P$", qui est fausse si P est vraie et vraie si P est fausse, aussi représentée par le tableau de vérité suivant :*

P	$NON\ P$

Exemple 1.2.

— $NON(3 < 5)$ *est-elle une assertion vraie ou fausse ?*

— $NON(3 = 5)$ *est-elle une assertion vraie ou fausse ?*

1.3 Equivalence

Définition 1.3. *Si P et Q sont deux assertions, on définit l'assertion $P \Leftrightarrow Q$, lue "P* **équivalente** *à Q", par la table de vérité suivante :*

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$

L'assertion ($P \Leftrightarrow Q$) est vraie si et seulement si P et Q sont de même nature, c'est-à-dire vraies simultanément ou fausses simultanément.

Exemple 1.3. *Montrer que "Jean est le fils de Jacques" $\Leftrightarrow$ "Jacques est le père de Jean".*

1.4 Conjonction et disjonction

Définition 1.4. *Si P et Q sont deux assertions, on définit la conjonction de P et Q, notée "(P ET Q)" ou $P \wedge Q$ par la table de vérité suivante :*

P	Q	P ET Q

L'assertion (P ET Q) est vraie si et seulement si P et Q sont vraies simultanément, elle est fausse dans tous les autres cas.

Définition 1.5. *Si P et Q sont deux assertions, on définit la disjonction de P et Q, notée "(P OU Q)" ou $P \vee Q$, par la table de vérité suivante :*

P	Q	P OU Q

L'assertion (P OU Q) est vraie si P est vraie ou si Q est vraie. Elle n'est fausse que si P et Q sont simultanément fausses. On remarque que l'on peut inverser P et Q sans changer la table de vérité : on dit que l'opérateur logique OU est commutatif.

Remarque 1.1. *Contrairement à l'utilisation courante de la langue française, le "OU" n'est pas exclusif, c'est-à-dire que que la proposition (P OU Q) est vraie si P est vraie ou si Q est vraie ou si les deux sont vraies.*
Par exemple, quand il est écrit sur un menu "fromage ou dessert", vous n'avez pas le droit de commander les deux ! Mais en mathématiques, cela signifie que vous pouvez prendre l'un ou l'autre ou les deux...

Exemple 1.4. *(M. Durand désigne un étudiant du Cycle Préparatoire de l'INSA) Soit P l'assertion : "M. Durand est un étudiant de l'INSA", Q : "M. Durand est lycéen", R : "M. Durand a le bac ou un diplôme équivalent". Les assertions (P ET Q), (P OU Q) et (P ET R) sont-elles vraies ou fausses ?*

Proposition 1.6. *Pour toute proposition logique P,*

$$NON(NON(P)) \Leftrightarrow P. \tag{1}$$

$$P \text{ ET } NON(P) \text{ est toujours fausse.} \tag{2}$$

$$P \text{ OU } NON(P) \text{ est toujours vraie.} \tag{3}$$

Démonstration Ecrivons la table de vérité correspondante :

P	$NON(P)$	$NON(NON(P))$	(1)	P ET $NON(P)$	P OU $NON(P)$
V					
F					

◇

Théorème 1.7 (Lois de Morgan). *Pour deux assertions P et Q, les équivalences suivantes sont toujours vraies :*

$$NON(P \text{ } ET \text{ } Q) \Leftrightarrow (NON(P) \text{ } OU \text{ } NON(Q)), \tag{4}$$

$$NON(P \text{ } OU \text{ } Q) \Leftrightarrow (NON(P) \text{ } ET \text{ } NON(Q)). \tag{5}$$

Démonstration Ecrivons la table de vérité de la première proposition :

P	Q	P ET Q	$NON(P$ ET $Q)$	$NON(P)$	$NON(Q)$	$NON(P)$ OU $NON(Q)$	(4)
V	V						
V	F						
F	V						
F	F						

Démontrons l'équivalence 5 (méthode sans table de vérité) :

$$\begin{aligned} NON(P \text{ OU } Q) &\Leftrightarrow NON\Big[NON\big(NON(P)\big) \text{ OU } NON\big(NON(Q)\big)\Big] && \text{(d'après (1))} \\ &\Leftrightarrow NON\big[NON\Big(NON(P) \text{ ET } NON(Q)\Big)\big] && \text{(d'après (4))} \\ &\Leftrightarrow NON(P) \text{ ET } NON(Q) && \text{(d'après (1))}. \end{aligned}$$

◇

Théorème 1.8 (Associativité). *Pour trois assertions P, Q et R, les équivalences suivantes sont toujours vraies :*

$$P \text{ } OU \text{ } (Q \text{ } OU \text{ } R) \Leftrightarrow (P \text{ } OU \text{ } Q) \text{ } OU \text{ } R, \quad \textit{on écrit } P \text{ } OU \text{ } Q \text{ } OU \text{ } R, \tag{6}$$

$$P \text{ } ET \text{ } (Q \text{ } ET \text{ } R) \Leftrightarrow (P \text{ } ET \text{ } Q) \text{ } ET \text{ } R, \quad \textit{on écrit } P \text{ } ET \text{ } Q \text{ } ET \text{ } R. \tag{7}$$

Théorème 1.9 (Distributivité). *Soit P, Q et R 3 assertions, on a :*

$$P \text{ } ET \text{ } (Q \text{ } OU \text{ } R) \Leftrightarrow (P \text{ } ET \text{ } Q) \text{ } OU \text{ } (P \text{ } ET \text{ } R), \tag{8}$$

$$P \text{ } OU \text{ } (Q \text{ } ET \text{ } R) \Leftrightarrow (P \text{ } OU \text{ } Q) \text{ } ET \text{ } (P \text{ } OU \text{ } R). \tag{9}$$

Pour vous entraîner, démontrer les deux derniers théorèmes à l'aide d'un tableau de vérité.

1.5 Implication

Définition 1.10. *Si P et Q sont deux assertions, on définit l'assertion $P \Rightarrow Q$, lue "P* **implique** *Q", par ((NON P) OU Q) :*

P	Q	$NON\ P$	$P \Rightarrow Q$

Remarque 1.2. *Cette définition entraîne les remarques suivantes :*
- *Le faux implique n'importe quoi.*
- *Le vrai est impliqué par n'importe quoi.*
- *Pour démontrer $P \Rightarrow Q$, on n'a pas à supposer que P est fausse. On suppose que P est vraie et on cherche à démontrer que Q est vraie.*
- *Quand P est vraie et "$P \Rightarrow Q$" est vraie, alors Q est vraie.*

Exemple 1.5. *En reprenant les assertions de l'exemple 1.4, montrer que $P \Rightarrow R$.*

Exemple 1.6. *Que dire de l'implication "M. Durand peut se toucher le coude avec sa langue" $\Rightarrow$ "M. Durand est une fougère" ?*

Remarque 1.3. *Pour alléger la phrase, on dira parfois "P" au lieu de "P est vraie" dans la suite.*

Proposition 1.11. *Soit P, Q deux assertions, alors*

$$\begin{array}{l}(P\ ET\ Q) \Rightarrow P \\ P \Rightarrow (P\ OU\ Q) \\ (P\ ET\ Vrai) \Leftrightarrow P \\ (P\ OU\ Vrai) \Leftrightarrow\ Vrai \\ (P\ ET\ Faux) \Leftrightarrow\ Faux \\ (P\ OU\ Faux) \Leftrightarrow P\end{array}$$

Exercice 1.12. *Démontrer la première propriété de deux manières différentes.*

Proposition 1.13. *Si P et Q sont deux assertions, alors*

$$(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow ((P \Rightarrow Q)\ ET\ (Q \Rightarrow P)).$$

Remarque 1.4.

- *Lorsque l'on a une équivalence $P \Leftrightarrow Q$, on peut donc la démontrer en prouvant l'implication $P \Rightarrow Q$ et l'***implication réciproque** *$Q \Rightarrow P$.*
- *Il faut être prudent lors de l'utilisation de $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$!*

Définition 1.14.

- *Si $P \Rightarrow Q$, on dit que P est une condition* ***suffisante*** *pour que Q soit vraie, et que Q est une condition* ***nécessaire*** *pour que P soit vraie.*
- *Si P et Q sont équivalentes, on dit que Q est une condition* ***nécessaire et suffisante*** *pour P.*

Remarque 1.5.

- *L'assertion $P \Rightarrow Q$ peut aussi se lire "Si P (est vraie), alors Q (est vraie)".*
- *Pour démontrer $P \Rightarrow Q$, on suppose P et on démontre Q.*

Exercice 1.15. *Démontrer le théorème suivant : "Soit $n \in \mathbb{N}$. Si n est pair, alors il est divisible par deux".*

Théorème 1.16 (Contraposée). *Pour deux assertions P et Q, on a :*

$$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow [NON(Q) \Rightarrow NON(P)]\,. \tag{10}$$

La proposition logique $NON(Q) \Rightarrow NON(P)$ s'appelle la ***contraposée*** *de l'implication $P \Rightarrow Q$.*

Démonstration Ecrivons la table de vérité de la proposition :

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$NON(Q)$	$NON(P)$	$NON(Q) \Rightarrow NON(P)$	(10)
V	V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V

◇

Remarque 1.6. *Pour démontrer $P \Rightarrow Q$, il est équivalent et parfois plus aisé de démontrer $(NON\ Q) \Rightarrow (NON\ P)$*

Exemple 1.7. *Montrer la proposition suivante : n^2 pair $\Rightarrow$ n pair.*

Lemme 1.17. *[Négation de l'implication] Soit P et Q deux assertions, on a :*

$$NON\ (P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (P\ ET\ (NON\ Q))$$

Démonstration On applique les lois de Morgan à $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow ((NON\ P)$ OU $Q)$. $\diamond$

Théorème 1.18. *[Transitivité de l'implication] Soit P, Q et R trois assertions, la proposition*

$$[(P \Rightarrow Q)\ ET\ (Q \Rightarrow R)] \Rightarrow (P \Rightarrow R) \tag{11}$$

est toujours vraie

Conséquence : Si on a démontré $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow R$, on pourra en déduire $P \Rightarrow R$.

Démonstration Supposons $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow R$. Supposons maintenant P et montrons R. On a P et $P \Rightarrow Q$, donc Q. Comme on a aussi $Q \Rightarrow R$, on a R. Donc $P \Rightarrow R$. $\diamond$

Théorème 1.19 (Transitivité de l'équivalence)**.** *Soit P, Q et R trois assertions, la proposition*

$$[(P \Leftrightarrow Q)\ ET\ (Q \Leftrightarrow R)] \Rightarrow (P \Leftrightarrow R) \tag{12}$$

est toujours vraie.

Conséquence : Si on a démontré $P \Leftrightarrow Q$ et $Q \Leftrightarrow R$, on pourra en déduire $P \Leftrightarrow R$.
On pourra également écrire une série d'équivalences : $P \Leftrightarrow Q \Leftrightarrow R \Leftrightarrow \ldots$

Démonstration Supposons $(P \Leftrightarrow Q)$ et $(Q \Leftrightarrow R)$. En revenant à la définition de l'équivalence, on en déduit d'une part $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow R$, et d'autre part $Q \Rightarrow P$ et $R \Rightarrow Q$. D'après la transitivité de l'implication, on en déduit $P \Rightarrow R$ et $R \Rightarrow P$, c'est-à-dire $P \Leftrightarrow R$. $\diamond$

Test d'assimilation

1. Soit P l'assertion "la poule est rousse". Donner (NON P).
2. Soit Q l'assertion "la fonction f est croissante". Donner (NON Q).
3. Donner NON(NON P). Démontrer-le.
4. Soit B l'assertion "la poule est blanche".
   Expliciter en français les assertions (P OU B), (NON P OU NON B), (P ET B), (NON P ET NON B), NON(P OU B), NON(P ET B). Que constate-t-on ?
5. Soit D l'assertion "la fonction f' est positive". D est-elle une condition nécessaire, suffisante ou nécessaire et suffisante pour Q ?
6. Dans quel cas a-t-on $D \Leftrightarrow Q$?
7. Donner la contraposée de $B \Rightarrow P$.
8. Donner la réciproque de $B \Rightarrow P$.
9. Donner la négation de $B \Rightarrow P$.
10. Un père sermone ses enfants "Si vous n'aidez pas à débarrasser la table, vous ne regarderez pas la télévision après manger". Penauds, les enfants débarrassent la table et pourtant leur père ne leur laisse pas regarder la télévision. Résolvez l'énigme... mathématique, mon cher Watson !

2 Raisonnement

2.1 Quantificateurs

Soit E un ensemble et $P(x)$ une propriété (ou assertion) dépendant d'un élément x quelconque de E.

Définition 2.1. *"Quelque soit : $\forall$"*

$$\forall x \in E, \ P(x)$$

*se lit "***quelque soit** *x appartenant à E, $P(x)$" et signifie que tous les x éléments de E vérifient la propriété $P(x)$, ou bien encore que la propriété $P(x)$ est vraie pour tout élément x appartenant à E.*

Exemple 2.1. $\forall x \in \mathbb{R}, \ x^2 \geq 0.$

Définition 2.2. *"Il existe : $\exists$"*

$$\exists x_0 \in E \text{ tel que } P(x_0)$$

*se lit "***il existe** *x_0 appartenant à E tel que $P(x_0)$" et signifie qu'il existe au moins un x_0 élément de E qui vérifie la propriété $P(x)$.*

Attention ! On ne sait pas *a priori* quel x_0 convient. On sait juste qu'il existe et on peut travailler formellement avec.

Exemple 2.2.

- $\exists x \in \mathbb{R}$ *tel que* $x > 5$ *(par exemple* $6 \in \mathbb{R}$ *et* $6 > 5$*).*
- $\exists x \in \mathbb{R}$ *tel que* $x = 5$ *(il n'y en a qu'un seul :* $x = 5$*).*

Après un $\exists$, le "tel que" est souvent remplacé par une virgule ou un $|$.

Définition 2.3. *"$\exists!$"*

$$\exists! x \in E, \ P(x)$$

*se lit "***il existe un unique** *x appartenant à E tel que $P(x)$".*

Exemple 2.3. $\exists! x \in E, x = 5.$

2.2 Règles d'utilisation des quantificateurs

Nous allons donner les règles qui régissent l'utilisation de ces quantificateurs avec les signes logiques.

Négation

$$
\begin{aligned}
[NON(\forall x \in E,\ P(x))] &\Leftrightarrow [\exists x \in E,\ NON(P(x))]\,, && (13)\\
[NON(\exists x \in E,\ P(x))] &\Leftrightarrow [\forall x \in E,\ NON(P(x))]\,. && (14)
\end{aligned}
$$

Exemple 2.4. *Donner la négation des assertions suivantes : "Tous les joueurs du stade toulousain ont un maillot rouge et noir", "Il existe un étudiant de l'INSA qui est champion d'Europe de Kayak."*

Distributivité

$$
\begin{aligned}
[\exists x \in E,\ (P(x) \text{ OU } Q(x))] &\Leftrightarrow [\exists x \in E,\ P(x)] \text{ OU } [\exists x \in E,\ Q(x)]\,, && (15)\\
[\forall x \in E,\ (P(x) \text{ ET } Q(x))] &\Leftrightarrow [\forall x \in E,\ P(x)] \text{ ET } [\forall x \in E,\ Q(x)]\,. && (16)
\end{aligned}
$$

Attention ! Dans le cas des deux propositions suivantes, seule l'implication est vraie.

$$
\begin{aligned}
\exists x \in E,\ (P(x) \text{ ET } Q(x)) &\Rightarrow [\exists x \in E,\ P(x)] \text{ ET } [\exists x \in E,\ Q(x)]\,, && (17)\\
[\forall x \in E,\ P(x)] \text{ OU } [\forall x \in E,\ Q(x)] &\Rightarrow \forall x \in E,\ (P(x) \text{ OU } Q(x)) && (18)
\end{aligned}
$$

Pour ces deux propositions, les réciproques sont fausses !

Exemple 2.5. *Soit E l'ensemble des étudiants de l'INSA. On appelle $P(x)$ le prédicat "l'étudiant x possède un ordinateur" et $Q(x)$ le prédicat "l'étudiant x possède un vélo". Traduire en français les phrases mathématiques* (15), (16), (17) *et* (18).

Remarque 2.1.

- ***Pour démontrer*** $(\forall x \in E,\ P(x))$***, on écrit : "soit*** $x \in E$***, montrons que*** $P(x)$ ***est vraie."***
- ***Pour démontrer*** $(\exists x \in E,\ P(x))$***, on écrit : "on cherche*** $x \in E$ ***tel que*** $P(x)$ ***soit vraie. On pose*** $x = \dots$ ***" (il faut le trouver d'abord) et on montre ensuite qu'il convient.***

2.3 Raisonnement par contre-exemple

En vertu de l'assertion 13, pour prouver "$NON(\forall x \in E,\ P(x))$", il suffit de trouver un contre-exemple, c'est-à-dire de trouver un seul élément $x \in E$ qui vérifie $NON(P(x))$.

Exemple 2.6. *Montrons que* $(\forall x \in \mathbb{R},\ x \geq 0)$ *est fausse.*

2.4 Raisonnement par l'absurde

En vertu de l'assertion (2), on peut aussi raisonner par l'absurde pour démontrer une propriété P :

On effectue l'hypothèse de départ $NON(P)$. Si on réussit à démontrer grâce à cette hypothèse un résultat faux (par exemple que pour une autre assertion Q, Q et $NON(Q)$ sont vraies simultanément), on arrive à une absurdité. Cela signifie que l'assertion NON(P) est fausse, et donc P est vraie.

Exemple 2.7. *Montrer que* $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Exemple 2.8. *Pour prouver une implication $P \Rightarrow Q$, on peut raisonner par l'absurde : on suppose $NON(P \Rightarrow Q)$, c'est-à-dire (P ET NON(Q)), et on essaie de démontrer à partir de toutes ces hypothèses un résultat faux.*

2.5 Raisonnement par récurrence

Soit une propriété $P(n)$ dépendant d'un entier $n \in \mathbb{N}$. On souhaite démontrer que cette propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ ou à partir d'un certain rang.

Théorème 2.4 (Principe de récurrence)**.** *Soit* $n_0 \in \mathbb{N}$.
Si $P(n_0)$ est vraie (Initialisation) et $\forall n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq n_0$, $\quad P(n) \Rightarrow P(n+1)$ (Hérédité) alors $\forall n \geq n_0$, $\quad P(n)$ est vraie.

Remarque 2.2. *Pour démontrer un résultat par un raisonnement par récurrence, il faut tout d'abord énoncer proprement l'hypothèse de récurrence $P(n)$, démontrer l'initialisation, c'est-à-dire que $P(n_0)$ est vraie, et ensuite prouver l'hérédité ($P(n) \Rightarrow P(n+1)$). On conclut alors en appliquant le principe de récurrence.*

Exemple 2.9. *Montrer que* $\forall n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

On suit alors les étapes suivantes :

- **Définition de l'hypothèse de récurrence :** *pour $n \in \mathbb{N}$, on appelle $P(n)$ la propriété :*

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

- **Initialisation :** $n=0$. *On a* $\sum_{k=0}^{0} k = 0 = \frac{0\times 1}{2}$. *Donc* $P(0)$ *est vraie.*

- **Hérédité :** *Soit* $n \in \mathbb{N}$. *Supposons que* $P(n)$ *est vraie et montrons que* $P(n+1)$ *est vraie.*
  On a supposé $P(n)$ *vraie donc* $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$. *Calculons* $\sum_{k=0}^{n+1} k$ *: on a*
  $$\sum_{k=0}^{n+1} k = \sum_{k=0}^{n} k + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$
  On a donc prouvé $P(n+1)$ *et ainsi l'hypothèse de récurrence : "*$\forall n \in \mathbb{N},\ P(n) \Rightarrow P(n+1)$*".*

- **Conclusion :** *On applique le principe de récurrence, et on en conclut que* $\forall n \in \mathbb{N}$ *on a* $P(n)$, *i.e.* $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

2.6 Raisonnement par analyse-synthèse

Le raisonnement par analyse-synthèse intervient lorsqu'on veut démontrer l'existence de quelque chose (souvent un élément vérifiant un prédicat) mais que cette démonstration suppose de connaitre au préalable la forme de cet élément. On raisonne alors en deux temps :

1. D'abord, on suppose connue l'existence de cet élément et on cherche sa forme.
2. Ensuite, on montre l'existence de cet élément vérifiant le prédicat.

Exemple 2.10. *Montrons que toute fonction de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *s'écrit comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.*
On note $\mathcal{F}$ *l'ensemble des fonctions définies de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$, $\mathcal{I}$ *l'ensemble des fonctions impaires et* $\mathcal{P}$ *l'ensemble des fonctions paires. On doit donc montrer que*

$$\forall f \in \mathcal{F}\,, \quad \exists (p,i) \in \mathcal{P}\times\mathcal{I}\,, \quad f = p + i$$

Raisonnons par analyse synthèse.

1. ***Analyse :*** *Soit* $f \in \mathcal{F}$. *Si le couple* (p,i) *existe alors* $\exists (p,i) \in \mathcal{P}\times\mathcal{I},\ f = p+i$. *Or* $p \in \mathcal{P}$ *donc* $\forall x \in \mathbb{R},\ p(-x) = p(x)$. *De même,* $i \in \mathcal{I}$ *donc* $\forall x \in \mathbb{R},\ i(-x) = -i(x)$. *Ainsi,* $\forall x \in \mathbb{R}$,
   $$\begin{cases} f(x) = & p(x) + i(x) \\ f(-x) = & p(x) - i(x) \end{cases}$$
   En faisant la somme et la différence des deux lignes précédentes, on résout ce système par équivalence et on obtient
   $$p(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} \quad et \quad i(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}.$$
   On a ainsi identifié à quoi ressemblent les fonctions p *et* i *de la décomposition recherchée.*

2. ***Synthèse :*** *Reprenons maintenant la démonstration au début. Soit $f \in \mathcal{F}$. Montrons que la décomposition $p + i$ existe. D'après la remarque 2.1, on doit vérifier que les p et i trouvés précédement conviennent. Soient donc p et i les fonctions définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}$,*

$$\begin{aligned} p(x) =& \frac{f(x) + f(-x)}{2} \\ i(x) =& \frac{f(x) - f(-x)}{2} \end{aligned}$$

Alors, $\forall x \in \mathbb{R}$, $p(-x) = p(x)$ et $i(-x) = -i(x)$. Ainsi, on a $p \in \mathcal{P}$ et $i \in \mathcal{I}$.

On a ainsi démontré que

$$\forall f \in \mathcal{F}\,, \quad \exists (p, i) \in \mathcal{P} \times \mathcal{I}\,, \quad f = p + i$$

On a même démontré l'unicité de cette décomposition !

3 Test d'assimilation

1. Identifiez les assertions correctes :

$$3 \in \mathbb{N} \quad \pi \notin \mathbb{Q} \quad -1 \in \mathbb{N} \quad e \in \mathbb{R}$$

2. Ecrire une propriété vraie pour tout réel.
3. Ecrire une propriété fausse pour tout réel.
4. Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Si elles sont vraies, les démontrer, sinon donner leur négation.
   a. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad (x+1)^2 > 0$
   b. $\exists x \in \mathbb{R}, \quad x^2 = -1$
   c. $\exists x \in \mathbb{C}, \quad x^2 = -1$
   d. $\exists! x \in \mathbb{R}, \quad 2x^2 + 3x + 1 = 0$
   e. $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad (xz = yz \Rightarrow x = y)$
5. Dites si pour démontrer les assertions suivantes, un contre-exemple est nécessaire ou pas. Démontrez-les :
   a. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad (x+1)^2 < 0$
   b. $\exists x \in \mathbb{C}, \quad x^2 = -1$
   c. Toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est croissante.
   d. Toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivable est continue.
   e. Toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continue est dérivable.
6. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_{n+1} = ku_n$ et $u_0 \in \mathbb{R}$ (suite géométrique de raison k). Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = k^n u_0$. (Refaire cet exercice avec une suite arithmétique de raison r)
7. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et $u_0 > 0$. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.