CHAPITRE 3

Fonctions usuelles

1. Logarithme, exponentielle, puissances

1.1. Logarithme. La fonction logarithme népérien, notée ln, est définie comme la primitive de $]0,+\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $]0,+\infty[$ qui s'annulle en 1.

Proposition 3.1. *La fonction* $\ln :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ *a les propriétés suivantes :*

(1) $\ln 1 = 0$,

(2) $\ln$ *est est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $]0,+\infty[$ *et pour tout* $x>0$, $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$,

(3) $\ln$ *est strictement croissante,*

(4) $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$, $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$,

(5) *pour tout* $x,y>0$, $\ln(xy) = \ln x + \ln y$.

1.2. Exponentielle. La fonction ln est continue, strictement croissante de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ et $\ln(]0,+\infty[) = \mathbb{R}$, donc ln réalise une bijection de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$. On appelle exponentielle sa fonction réciproque

$$\exp : \mathbb{R} \to]0,+\infty[,\ x \mapsto \exp x = e^x,$$

où e est l'unique solution de l'équation $\ln x = 1$.

Proposition 3.2. *La fonction exponentielle vérifie les propriétés suivantes :*

(1) *pour tout* $x\in\mathbb{R}$, $\ln(\exp x) = x$ *et pour tout* $y>0$, $\exp(\ln y) = y$,

(2) $\exp$ *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}$,

(3) *pour tout* $x\in\mathbb{R}$, $\exp'(x) = \exp x$,

(4) $\exp$ *est strictement croissante,*

(5) $\lim\limits_{x\to -\infty} e^x = 0$, $\lim\limits_{x\to +\infty} e^x = +\infty$,

(6) $e^0 = 1$,

(7) *pour tout* $x,y\in\mathbb{R}$, $e^{x+y} = e^x e^y$.

1.3. Puissances. Pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$, on définit la fonction *puissance* α par

$$f_\alpha :]0,+\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto x^\alpha = e^{\alpha \ln x}.$$

Proposition 3.3. *On a les propriétés suivantes*

(1) *pour tout* $\alpha \in \mathbb{R}$, f_α *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $]0, +\infty[$,

(2) *pour tout* $x \in]0, +\infty[$, $f'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}$,

(3) *si* $\alpha > 0$, *alors*
   – f_α *est strictement croissante sur* $]0, +\infty[$,
   – $\lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha = +\infty$,

(4) *si* $\alpha < 0$, *alors*
   – f_α *est strictement décroissante sur* $]0, +\infty[$,
   – $\lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha = 0$,

(5) *pour tout* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *pour tout* $x > 0$, $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$,

(6) *pour tout* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *pour tout* $x > 0$, $x^{\alpha\beta} = \left(x^\alpha\right)^\beta$,

(7) *pour tout* $\alpha \in \mathbb{R}$, *pour tout* $x, y > 0$, $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$,

1.4. Croissances comparées. Le résultat suivant compare les croissances respectives des fonctions logarithme, exponentielle et puissances. On peut l'énoncer ainsi : *"les puissances l'emportent sur le logarithme"* et *"l'exponentielle l'emporte sur les puissances"*.

Proposition 3.4.

(1) *pour tout* $\alpha > 0$, *tout* $\beta \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{|\ln x|^\beta}{x^\alpha} = 0$,

(2) *pour tout* $\alpha > 0$, *tout* $\beta \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\beta e^{-\alpha x} = 0$,

(3) *pour tout* $\alpha > 0$, *tout* $\beta \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha |\ln x|^\beta = 0$,

2. Fonctions hyperboliques

On définit les fonctions cosinus hyperbolique, sinus hyperbolique et tangente hyperbolique comme suit

$$\begin{aligned}
&\mathrm{ch} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \mathrm{ch}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}\\
&\mathrm{sh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \mathrm{sh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}\\
&\mathrm{th} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \mathrm{th}x = \frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}
\end{aligned}$$

ch est la partie paire de l'exponentielle, sh sa partie impaire.

Proposition 3.5. *On a les propriétés suivantes :*

(1) *ch est paire, sh est impaire,*

(2) *ch et sh sont de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}$, *et pour tout* $x \in \mathbb{R}$,

$$ch'x = sh\,x, \quad sh'x = ch\,x,$$

(3) *pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $ch^2 x - sh^2 x = 1$,

(4) $ch(0) = 1$, $\lim_{x \to -\infty} ch\, x = +\infty$ *et* $\lim_{x \to +\infty} ch\, x = +\infty$,

(5) $sh(0) = 0$, $\lim_{x \to -\infty} sh\, x = -\infty$ *et* $\lim_{x \to +\infty} sh\, x = +\infty$,

(6) *th est impaire, de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}$, *et pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $th' x = \dfrac{1}{ch^2 x} = 1 - th^2 x$,

(7) $th(0) = 0$, $\lim_{x \to -\infty} th\, x = -1$ *et* $\lim_{x \to +\infty} th\, x = 1$.

3. Fonctions circulaires réciproques

3.1. Rappels sur les fonctions circulaires. On munit le plan d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $M(x)$ le point du cercle trigonométrique tel que l'angle $(\vec{u}, \vec{OM}) = x \,(mod\ 2\pi)$. Alors les coordonnées de $M(x)$ sont $(\cos x, \sin x)$. Si $\cos x \neq 0$, on pose $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$.

Proposition 3.6. *On a les propriétés suivantes :*

(1) *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

(2) *Les fonctions* $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *et* $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *sont* 2π*-périodiques, de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *et pour tout* $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos' x = -\sin x, \quad \sin' x = \cos x.$$

(3) $\cos$ *est paire,* $\sin$ *est impaire.*

(4) *La fonction* $\tan$ *est* π*-périodique, définie et de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ *et pour tout* $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$, $\tan' x = \dfrac{1}{\cos^2 x} = \tan^2 + 1$.

3.2. La fonction arcsinus. La fonction sin n'est pas une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\sin(\mathbb{R})$. Pour définir une fonction réciproque, il faut restreindre sin à un intervalle où elle est strictement monotone.
La fonction sin est continue et strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, elle définit donc une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $\sin\left(\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right) = [-1, 1]$. Sa fonction réciproque est appelée arcsinus, notée arcsin

$$\begin{array}{rcl} \arcsin : [-1,1] & \to & \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ x & \mapsto & \arcsin x \end{array}$$

avec

$$y = \arcsin x \iff x = \sin y \textbf{ et } y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

La fonction arcsin est impaire, strictement croissante et continue sur $[-1, 1]$. Elle est dérivable sur $]-1, 1[$, et pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Remarque 3.1. *On a toujours* $\sin(\arcsin x) = x$ *mais on a* $\arcsin(\sin x) = x$ *seulement si* $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. *Par exemple* $\arcsin(\sin(2\pi)) = 0$.

3.3. La fonction arccosinus. La fonction cos est continue et strictement décroissante sur $[0,\pi]$, elle définit donc une bijection de $[0,\pi]$ sur $\cos([0,\pi]) = [-1,1]$. Sa fonction réciproque est appelée arccosinus, notée arccos

$$\begin{aligned} \arccos : [-1,1] &\to [0,\pi] \\ x &\mapsto \arccos x \end{aligned}$$

avec

$$y = \arccos x \iff x = \cos y \textbf{ et } y \in [0,\pi].$$

La fonction arccos est paire, strictement décroissante et continue sur $[-1,1]$. Elle est dérivable sur $]-1,1[$, et pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\arccos' x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Remarque 3.2. *On a toujours* $\cos(\arccos x) = x$ *mais on a* $\arccos(\cos x) = x$ *seulement si* $x \in [0,\pi]$. *Par exemple* $\arccos(\cos(-\pi)) = \pi$.

3.4. La fonction arctangente. La fonction tan est continue et strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, elle définit donc une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ sur $\tan\left(\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\right) = \mathbb{R}$. Sa fonction réciproque est appelée arctangente, notée arctan

$$\begin{aligned} \arccos : \mathbb{R} &\to \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\\ x &\mapsto \arctan x \end{aligned}$$

avec

$$y = \arctan x \iff x = \tan y \textbf{ et } y \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[.$$

La fonction arctan est impaire, strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\arctan' x = \frac{1}{1+x^2}.$$

On a

$$\lim_{x\to-\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x\to+\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}.$$

Remarque 3.3. *On a toujours* $\tan(\arctan x) = x$ *mais on a* $\arctan(\tan x) = x$ *seulement si* $x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$. *Par exemple* $\arctan(\tan(\pi)) = 0$.