Rappels : nombres complexes

1 Nombres complexes

1.1 Définition

Définition 1.1. *Il existe un ensemble $\mathbb{C}$ appelé ensemble des complexes tel que :*

- $\mathbb{R}$ *est inclus dans* $\mathbb{C}$,
- *Tout élément z de $\mathbb{C}$ est appelé nombre complexe et s'écrit de la manière suivante :*

$$z = x + iy\,,$$

où $\mathbf{i^2 = -1}$, *$x \in \mathbb{R}$ désigne la* ***partie réelle*** *de z, notée $Re(z)$, et $y \in \mathbb{R}$ désigne la* ***partie imaginaire*** *de z, notée $Im(z)$.*
- *L'écriture $z = x + iy$ est appelée* ***forme algébrique*** *et elle est unique : si deux nombres complexes sont égaux alors ils ont même partie réelle et même partie imaginaire.*
- *Pour tous nombres complexes $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$, on a les règles suivantes :*

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \in \mathbb{C},$$
$$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1) \in \mathbb{C}.$$

- *Si $z = x + iy \neq 0$ alors :*

$$z^{-1} = \frac{1}{x^2 + y^2}(x - iy) \in \mathbb{C}.$$

1.2 Conjugué

Définition 1.2. *On appelle conjugué d'un complexe $z = x + iy \in \mathbb{C}$ le complexe noté $\overline{z}$ et défini par $\overline{z} = x - iy$.*

Proposition 1.3. *Pour tout complexe z, on a :*

$$z + \overline{z} = 2Re(z), \quad z - \overline{z} = 2iIm(z)$$

En particulier, $z \in \mathbb{R}$ *si et seulement si* $z = \overline{z}$, *c'est à dire* $Im(z) = 0$.

Et on dit que z est imaginaire pur si et seulement si $Re(z) = 0$, *c'est à dire* $z + \overline{z} = 0$.

Proposition 1.4.

– *Pour tout couple de complexes* $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$, *on a :*

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2},$$
$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}.$$

– *Pour tout* $z \in \mathbb{C}^*$, *on a :*

$$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$$

.

– *Pour tout couple de complexes* $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ *avec* $z_2 \neq 0$, *on a :*

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}.$$

– *Pour tout* $z \in \mathbb{C}$, *on a :*

$$z \cdot \overline{z} = x^2 + y^2 \in \mathbb{R}^+.$$

1.3 Module

Définition 1.5. *Pour tout* $z = x + iy \in \mathbb{C}$, *on définit le module de z noté* $|z|$ *par :*

$$|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Si $z \in \mathbb{R}$, *alors le module* $|z|$ *coïncide avec la valeur absolue de z.*

Proposition 1.6. *Pour tout* $z \in \mathbb{C}$,

- $|z| \in \mathbb{R}^+$,
- $|z| = 0$ *si et seulement si* $z = 0$,
- $|-z| = |z| = |\overline{z}|$,
- $|Re(z)| \leq |z|$ *et* $|Im(z)| \leq |z|$.

Proposition 1.7. *Pour tout* $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$*,*

- $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$,
- *si* $z_2 \neq 0$, $\left|\dfrac{1}{z_2}\right| = \dfrac{1}{|z_2|}$, $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$.

Proposition 1.8 (Inégalité triangulaire)**.** *Pour tout* $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$*, on a :*

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

1.4 Forme trigonométrique

Définition 1.9. *Si* $\theta \in \mathbb{R}$*, on note* $e^{i\theta}$ *le nombre complexe défini par :*

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

C'est un nombre complexe de module 1 : $|e^{i\theta}| = 1$*.*

Remarque. *Si* $\theta = 0$*, alors* $e^{i\theta} = 1$*.*

Proposition 1.10. *Pour tout nombre complexe* z *de module* $|z| = 1$ *(on parle de nombre complexe unitaire), il existe* $\theta \in \mathbb{R}$ *tel que* $z = e^{i\theta}$*.*

Définition 1.11. *On appelle* ***argument*** *de* z *tout réel* θ *tel que* $z = |z|e^{i\theta}$*. On note alors :*

$$\arg z \equiv \theta[2\pi].$$

Remarque. *L'argument d'un nombre complexe existe toujours puisque* $\frac{z}{|z|}$ *est de module 1 : il existe donc* $\theta \in \mathbb{R}$ *tel que* $\frac{z}{|z|} = e^{i\theta}$ *d 'après la proposition précédente.*

Proposition 1.12. *Soit* z *un complexe non nul et* θ_0 *un argument de* z*. L'ensemble des arguments de* z *est :*

$$\theta_0 + 2\pi\mathbb{Z} = \{\theta_0 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}.$$

Théorème 1.13. *Pour tout* $z \in \mathbb{C}^*$*, il existe un unique couple* $(\rho, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi]$ *tel que* $z = \rho e^{i\theta}$*, où* $\rho = |z|$ *est le module de* z *et* θ *est appelé argument principal de* z*. La forme* $z = \rho e^{i\theta}$ *est appelée* ***forme trigonométrique*** *de* z*.*

Proposition 1.14. *Soient* z_1 *et* z_2 *deux complexes non nuls de formes trigonométriques :*

$$z_1 = r_1 e^{i\theta_1} \quad \text{et} \quad z_2 = r_2 e^{i\theta_2}.$$

On a les formes trigonométriques suivantes :

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)} \quad \text{et} \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}.$$

Corollaire 1.15. *Soient z_1 et z_2 deux complexes non nuls. On a :*

$$\arg z_1 z_2 \equiv \arg z_1 + \arg z_2 \ [2\pi],$$
$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) \equiv \arg z_1 - \arg z_2 \ [2\pi].$$

Soit n un entier non nul et z un complexe non nul, on a :

$$\arg z^n \equiv n \arg z \ [2\pi].$$

Quelques formules utiles pour terminer.

Proposition 1.16 (Formules d'Euler)**.** *Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,*

$$\boxed{\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \quad \textit{et} \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}.}$$

Proposition 1.17 (Formule de Moivre)**.** *Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$, on a*

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \left(e^{i\theta}\right)^n & = & e^{in\theta}, \\ \textit{soit} \quad (\cos\theta + i\sin\theta)^n & = & \cos n\theta + i \sin n\theta. \end{array}}$$

1.5 Complément : exponentielle complexe

Définition 1.18. *Soit $z = x+iy$ un complexe (avec $(x,y) \in \mathbb{R}^2$). On appelle exponentielle de z le nombre complexe :*

$$e^z = e^x e^{iy}.$$

Proposition 1.19. *Etant donné un nombre complexe z, le module de e^z est $e^{Re(z)} \in \mathbb{R}^{+*}$, et l'un de ses arguments est $Im(z)$.*

1.6 Application à la trigonométrie

1.6.1 Linéarisation de $\cos^m\theta$ et $\sin^n\theta$

Cette application est <u>**fondamentale**</u> en vue du calcul intégral qui sera étudié dans les prochains regroupements.

L'objectif est d'exprimer $\cos^m\theta$ et $\sin^n\theta$ sous la forme d'une combinaison linéaire de $\cos k\theta$ et $\sin l\theta$, afin de faciliter la recherche de primitives. Pour cela, on remplace $\cos\theta$ et $\sin\theta$ grâce aux formules d'Euler et on développe.

Exemple.

$$\begin{aligned} \cos^5\theta &= \left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^5 = \frac{1}{2^5}\left(e^{5i\theta}+5e^{3i\theta}+10e^{i\theta}+10e^{-i\theta}+5e^{-3i\theta}+e^{-5i\theta}\right) \\ &= \frac{1}{16}\left(\cos 5\theta + 5\cos 3\theta + 10\cos\theta\right). \end{aligned}$$

1.6.2 Expression de $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

Pour cette applicaiton, on utilise cette fois la formule de Moivre :

$$\cos 5\theta + i\sin 5\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^5 .$$

D'où

$$\begin{aligned}
\cos 5\theta &= Re\,(\cos\theta + i\sin\theta)^5 = \cos^5\theta - 10\cos^3\theta\sin^2\theta + 5\cos\theta\sin^4\theta,\\
\sin 5\theta &= Im\,(\cos\theta + i\sin\theta)^5 = 5\cos^4\theta\sin\theta - 10\cos^2\theta\sin^3\theta + \sin^5\theta.
\end{aligned}$$

On pourra utiliser la relation $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ pour n'exprimer $\cos 5\theta$ qu'en fonction de $\cos\theta$ par exemple.

Pour aller plus loin : équations du second degré dans $\mathbb{C}$

Proposition 1.20. *Tout complexe non nul admet exactement deux racines carrées opposées.*

Remarque. *La notation $\surd$ ne sera réservée qu'aux nombres réels positifs pour laquelle la distinction entre les deux racines est simple : $\sqrt{a}$ est bien défini comme l'unique nombre positif b tel que $b^2 = a$.*

Proposition 1.21. *Etant donnés trois complexes a, b et c, avec $a \neq 0$. Considérons l'équation :*

$$az^2 + bz + c = 0,$$

et $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant.

- *Si $\Delta \neq 0$, en appelant δ une racine carrée de Δ, l'équation admet deux racines distinctes :*
$$z = \frac{-b \pm \delta}{2a}.$$
- *Si $\Delta = 0$, l'équation admet une racine double $z_0 = -\dfrac{b}{2a}$.*