Rappels : ensembles et inégalités

1 Lettres grecques

L'alphabet grec est d'usage courant en mathématiques, souvent pour permettre de différencier le rôle des différentes variables qui apparaissent dans un problème (un paramètre d'une variable, un nombre d'un vecteur...). Le voici en majuscules et minuscules :

Nom	Minuscule	Majuscule
alpha	α	A
beta	β	B
gamma	γ	Γ
delta	δ	Δ
epsilon	ϵ, ε	E
dzeta	ζ	Z
eta	η	H
theta	θ	Θ
iota	ι	I
kappa	κ	K
lambda	λ	Λ
mu	μ	M
nu	ν	N
xsi	ξ	Ξ
omicron	o	O
pi	π	Π
rho	ρ	P
sigma	σ, ς	Σ
tau	τ	T
upsilon	υ	U
phi	ϕ, φ	Φ
chi (ki)	χ	X
psi	ψ	Ψ
omega	ω	Ω

2 Ensembles

2.1 Ensembles connus

On rappelle que :

- $\emptyset$ l'ensemble vide, qui est l'unique ensemble ne contenant aucun élément.

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ est l'ensemble des nombres entiers naturels (positifs ou nuls),

- $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ est l'ensemble des nombres entiers relatifs (de signe quelconque),

- $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des nombres rationnels, c'est-à-dire l'ensemble des nombres qui peuvent s'écrire sous la forme $\frac{p}{q}$ où p et q sont des nombres entiers relatifs, q non nul,

- $\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres réels,

- $\mathbb{C}$ est l'ensemble des nombres complexes, c'est-à-dire l'ensemble des nombres qui peuvent s'écrire sous la forme $a + ib$ où a et b sont des réels et $i^2 = -1$.

Les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}$ sont souvent utilisés :

- $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R}\,,\ x \geq 0\}$ est l'ensemble des nombres réels positifs,

- $\mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R}\,,\ x \leq 0\}$ est l'ensemble des nombres réels négatifs,

- $\mathbb{R}^* = \{x \in \mathbb{R}\,,\ x \neq 0\}$ est l'ensemble des nombres réels non nuls,

- $\mathbb{R}^{+*} = \{x \in \mathbb{R}\,,\ x > 0\}$ est l'ensemble des nombres réels strictement positifs,

On peut définir de même les nombres réels strictement négatifs, strictement négatifs, etc...

2.2 Généralités sur les ensembles

2.2.1 Inclusion

Définition 2.1. *Un ensemble E est* **inclus** *dans un autre ensemble F, noté $E \subset F$, si :*

$$\textit{pour tout } x \in E,\ \ x \in F.$$

Sinon, on note $E \not\subset F$. Si $E \subset F$, on dit que E est une partie ou un sous-ensemble de F.

Remarque. *Pour démontrer $E \subset F$, il faut démontrer que tout élément x de E est aussi un élément de F. On écrit donc "Soit $x \in E$" et on montre que $x \in F$.*

Exemple. *Si l'on revient aux ensembles connus du paragraphe précédent, on a les inclusions suivantes :*

$$\emptyset \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}\,,$$

$$\{3\} \subset \mathbb{N}, \quad \{-1, 6\} \subset \mathbb{Z}, \quad \{\pi, 0\} \not\subset \mathbb{Q}\,.$$

Remarque. *On rappelle que l'ensemble noté* $\{x_1, x_2\}$ *est l'ensemble constitué des éléments* x_1 *et* x_2*. Cette notation s'étend à un nombre quelconque d'éléments :* $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ *est l'ensemble constitué des éléments* x_1*,* x_2*,* x_3*, etc. jusqu'à* x_n*.*

Définition 2.2. *On dit que* E *et* F *sont* **égaux** *si* $E \subset F$ *et* $F \subset E$*. Autrement dit si tout élément de* E *est élément de* F *et inversement. On le note* $E = F$*.*

Remarque. *Il ne faut pas confondre le symbole* $\in$ *("appartient à") et le symbole* $\subset$ *("inclus dans") : si* x *est un élément d'un ensemble* E*, on a* $x \in E$ *mais l'on n'a pas le droit d'écrire* $x \subset E$*. En revanche, l'écriture* $\{x\} \subset E$ *est correcte, et équivalente à* $x \in E$*.*

Méthodologie. *Pour montrer que deux ensembles* E *et* F *sont égaux, on montre d'abord que* $E \subset F$*, c'est-à-dire que SI* $x \in E$ *ALORS* $x \in F$ *puis que* $F \subset E$*, c'est-à-dire que SI* $x \in F$ *ALORS* $x \in E$*.*

Proposition 2.3 (Transitivité de l'inclusion)**.** *Soit* E *un ensemble,* A*,* B *et* C *trois parties de* E*. Si on a* $A \subset B$ *et* $B \subset C$*, alors on a* $A \subset C$*.*

2.2.2 Complémentaire

Définition 2.4 (Complémentaire)**.** *Soit* E *un ensemble et* A *une partie de* E*.*
Le **complémentaire** *de* A *dans* E*, noté* $\complement_E A$*, est l'ensemble des éléments de* E *qui ne sont pas dans* A *:*

$$\complement_E A = \{x \in E,\, x \notin A\}\,.$$

C'est une partie de E*, aussi notée* $\overline{A}$ *ou* A^c *lorsqu'il n'y a pas de risque de confusion.*

Exemple. $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$*,* $A = \{1, 3\} \subset E$ *et* $\complement_E A = \{2, 4, 5\} \subset E$*.*

Proposition 2.5. *Soit* E *un ensemble, et* A *et* B *deux parties de* E*. Alors :*

i) $(A^c)^c = A$*,*

ii) si $A \subset B$*, alors* $B^c \subset A^c$*.*

2.2.3 Intersection, Union

Définition 2.6 (Intersection, union). *Soit E un ensemble, et A et B deux parties de E. On appelle* **intersection** *de A et B la partie de E notée $A \cap B$ ("A inter B") et définie par :*

$$A \cap B = \{x \in E,\ (x \in A)\ ET\ (x \in B)\}.$$

On appelle **union** *de A et de B la partie de E, notée $A \cup B$ ("A union B"), définie par :*

$$A \cup B = \{x \in E,\ (x \in A)\ OU\ (x \in B)\}.$$

Exemple. *$E = \mathbb{N}$, $A = \{1, 2, 3, 4\}$ et $B = \{2, 4, 6, 8\}$. Alors $A \cap B = \{2, 4\}$ et $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$.*

Remarque. *Pour démontrer que $x \in A \cap B$, il faut et il suffit de montrer que $x \in A$ ET $x \in B$. Pour démontrer que $x \in A \cup B$, il faut et il suffit de montrer que $x \in A$ OU $x \in B$.*

Proposition 2.7. *Soit E un ensemble et A une partie de E*

$$\begin{array}{cc} A \cup \emptyset = A, & A \cap \emptyset = \emptyset \\ A \cup \complement_E A = E & A \cap \complement_E A = \emptyset. \end{array}$$

Proposition 2.8 (Commutativité). *Soit E un ensemble, A et B deux parties de E :*

$$A \cap B = B \cap A, \qquad A \cup B = B \cup A.$$

Proposition 2.9 (Associativité). *Soit E un ensemble, A, B et C trois parties de E,*

$$\begin{array}{rcll} A \cap (B \cap C) & = & (A \cap B) \cap C & \text{on écrit } A \cap B \cap C, \\ A \cup (B \cup C) & = & (A \cup B) \cup C & \text{on écrit } A \cup B \cup C. \end{array}$$

Proposition 2.10 (Distributivité). *Soit E un ensemble, A, B et C trois parties de E,*

$$\begin{array}{rcl} A \cap (B \cup C) & = & (A \cap B) \cup (A \cap C), \\ A \cup (B \cap C) & = & (A \cup B) \cap (A \cup C). \end{array}$$

Proposition 2.11 (Lois de Morgan). *Soit E un ensemble, A et B deux parties de E,*

$$\begin{array}{rcl} \complement_E(A \cup B) & = & \complement_E A \cap \complement_E B, \\ \complement_E(A \cap B) & = & \complement_E A \cup \complement_E B. \end{array}$$

2.3 Intervalles

Définition 2.12. *Soient a et b deux réels tels que $a \leq b$, le* ***segment*** *(ou* ***intervalle fermé borné****) $[a, b]$ est l'ensemble des nombres réels compris entre a et b :*

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \ , \ a \leq x \leq b\} \, .$$

Définition 2.13. *Une partie I de $\mathbb{R}$ est un* ***intervalle*** *si pour tous réels a et b appartenant à I et vérifiant $a \leq b$, on a $[a, b] \subset I$.*

Remarque. *Comme l'ensemble vide $\varnothing$ ne contient aucun élément, on peut considérer qu'il vérifie la propriété précédente et qu'il est ainsi un intervalle.*

Les intervalles de $\mathbb{R}$ qui peuvent être de formes variées. Soient a et b deux nombres réels tels que $a \leq b$:

- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \, , \, a \leq x \leq b\}$ est l'intervalle <u>fermé borné</u> (ou segment) d'extrémités a et b. Si $a = b$, cet intervalle est réduit à un point.
- $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \, , \, a \leq x\}$ est l'intervalle <u>fermé à gauche</u> d'extrémité a et <u>non borné</u> (ou demi-droite fermée à gauche).
- $]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \, , \, x \leq a\}$ est l'intervalle <u>fermé à droite</u> d'extrémité a et <u>non borné</u> (ou demi-droite fermée à droite).

Si $a < b$, on a aussi :

- $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \, , \, a < x < b\}$ est l'intervalle <u>ouvert borné</u> d'extrémités a et b.
- $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \, , \, a < x\}$ est l'intervalle <u>ouvert à gauche</u> d'extrémité a et <u>non borné</u> (ou demi-droite ouverte à gauche).
- $]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R} \, , \, x < a\}$ est l'intervalle <u>ouvert à droite d'extrémité a et non borné</u> (ou demi-droite ouverte à droite).

Exemple. *Les ensembles suivants sont tous des intervalles de $\mathbb{R}$:*

$$\begin{array}{ll} [1, 2[\, = \{x \in \mathbb{R} \ , \ 1 \leq x < 2\} \ , &]-1, 1[\, = \{x \in \mathbb{R} \ , \ -1 < x < 1\} \ , \\ ]-\infty, 0[\, = \{x \in \mathbb{R} \ , \ x < 0\} \ , & [3, +\infty[\, = \{x \in \mathbb{R} \ , \ x \geq 3\} \ . \end{array}$$

L'ensemble suivant n'est pas un intervalle :

$$A = \,]0, 1[\, \cup \,]1, 3[\ ,$$

car le segment $[1/2, 3/2]$ n'est pas contenu dans A bien que $1/2$ et $3/2$ soient dans A.

2.4 Complément : produit cartésien

Définition 2.14 (Produit cartésien)**.** *Soit E et F deux ensembles. On définit $E \times F$, le* **produit cartésien** *de E et F, comme l'ensemble des couples (x, y) avec $\underline{x \in E}$ et $\underline{y \in F}$.*

$$E \times F = \{(x, y),\ (x \in E)\ ET\ (y \in F)\}\,.$$

Si $E = F$, alors $E \times F = E \times E$ se note E^2.

Exemple. $E = \{1, 2, 3\}$ *et* $F = \{2, 4\}$. $E \times F = \{(1, 2), (2, 2), (3, 2), (1, 4), (2, 4), (3, 4)\}$.

Exemple. $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ *signifie que a et b sont deux réels (on dit aussi que (a, b) est un couple de réels).*

Remarque. *Le produit cartésien s'étend à un nombre quelconque d'ensembles : par exemple, $E \times F \times G$ est l'ensemble des triplets (x, y, z) avec $x \in E$, $y \in F$ et $z \in G$. On définit ainsi (entre autres) $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ puis $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ etc.*

3 Valeur absolue et inégalités dans $\mathbb{R}$

Définition 3.1. *La valeur absolue se définit par :*

$$|x| = \begin{cases} x & si \quad x \geq 0\,, \\ -x & si \quad x \leq 0\,. \end{cases}$$

*Cette valeur absolue possède les **propriétés fondamentales suivantes** :*

$$\boxed{|x| \geq 0 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}\,,}$$

$$\boxed{|x| = |y| \text{ si et seulement si } x = y \text{ OU } x = -y\,,}$$

$$\boxed{|x| \leq a \text{ si et seulement si } -a \leq x \leq a \ (\text{autrement dit } x \geq -a \text{ ET } x \leq a)\,,}$$

$$\boxed{\sqrt{x^2} = |x|\ .}$$

Proposition 3.2. ***(Règles de calcul sur les inégalités)***

1. *Si x et y sont deux réels non nuls, alors xy et $\frac{x}{y}$ sont de signe :*
   - *<u>positif</u> si x et y sont de <u>même signe</u>,*
   - *<u>négatif</u> si x et y sont de <u>signes contraires</u>.*
2. $\boxed{\text{Si } x \leq t \text{ et } y \leq z \text{ alors } x + y \leq t + z}$ ***(faux pour la soustraction !)***.
3. $\boxed{\text{Si } 0 \leq x \leq t \text{ et } 0 \leq y \leq z \text{ alors } xy \leq tz}$ ***(faux en général si les nombres ne sont pas tous positifs !)***.
4. $\boxed{\text{Si } 0 < x < y \text{ alors } \frac{1}{x} > \frac{1}{y} > 0,\ 0 < x^2 < y^2 \text{ et } 0 < \sqrt{x} < \sqrt{y}}$ ***(faux si les nombres ne sont pas tous positifs !)***.
5. $\boxed{\text{Si } x > 1 \text{ alors } 1 < \sqrt{x} < x < x^2 < x^3 < \dots}$.
6. $\boxed{\text{Si } 0 < x < 1 \text{ alors } 0 < \cdots < x^3 < x^2 < x < \sqrt{x} < 1}$.

Proposition 3.3. ***(Inégalité triangulaire)***
Pour tout couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$:

$$\boxed{|a + b| \leq |a| + |b|}$$

et plus généralement

$$\boxed{||a| - |b|| \leq |a - b| \leq |a| + |b|}$$

4 Rappels et compléments divers

4.1 Sommes et produits

Définition 4.1. *Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle. Alors on note :*

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} + u_n \, .$$

*Cette somme se lit "somme des u_k pour k allant de 0 à n" et **ne dépend jamais de k**.*

Exemple. *L'indice k est un indice de sommation "muet". On peut lui donner le nom que l'on veut.*

$$\sum_{k=0}^{n} k = \sum_{l=0}^{n} l = \sum_{prof=0}^{n} prof = \frac{n(n+1)}{2}$$

Définition 4.2. *Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle. Alors on note :*

$$\prod_{k=0}^{n} u_k = u_0 \times u_1 \times \cdots \times u_{n-1} \times u_n$$

*Ce produit se lit "produit des u_k pour k allant de 0 à n" et **ne dépend jamais de k**.*

4.2 Factoriels et puissances

Définition 4.3. *Soit n un entier naturel. L'entier noté $n!$ (qui se lit "factoriel n" ou "factorielle n") se définit par :*

$$n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1 \, .$$

Par convention, on pose $0! = 1$.

Proposition 4.4. *Soit (n, p) un couple d'entiers naturels non nuls tel que $p \leq n$. Alors :*

1. $n! = n \times (n-1)!$
2. $\dfrac{n!}{(n-p)!} = n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1)$
3. $\dfrac{n!}{p!} = n \times (n-1) \times \cdots \times (p+1)$

Définition 4.5. *Soit n un entier naturel et x un réel. Le nombre réel "x puissance n" noté x^n se définit par :*

$$x^n = \underbrace{x \times x \times \cdots \times x \times x}_{n \text{ fois}}$$

Par convention, on pose $x^0 = 1$.

Proposition 4.6 (Règles de calcul sur les puissances).
Soient n et p deux entiers naturels :

$$\boxed{\begin{array}{rcl} x^n & = & x \times x^{(n-1)} \\ x^{n+p} & = & x^n \times x^p \\ x^{np} & = & (x^n)^p \end{array}} \tag{1}$$

4.3 Combinaisons

Définition 4.7. *On note :*

$$C_n^p = \left(\begin{array}{c} n \\ p \end{array} \right) = \left\{ \begin{array}{cl} \dfrac{n!}{p!(n-p)!} & si \quad n \geq p \\ 0 & si \quad n < p \end{array} \right.$$

C_n^p est le nombre de **combinaisons** *de p éléments dans un ensemble à n éléments, c'est-à-dire le nombre de façons différentes de choisir un ensemble non ordonné et sans répétition de p éléments parmi n.*

Proposition 4.8. *Soit n et p des entiers avec $n \geq 1$.*

1. *$C_n^0 = C_n^n = 1$.*
2. *Pour tout $p \leq n, C_n^p = C_n^{n-p}$.*
3. *Triangle de Pascal : pour tout $1 \leq p \leq n, C_{n+1}^p = C_n^p + C_n^{p-1}$.*

Théorème 4.9 (Formule du binôme de Newton). *Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :*

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}.}$$