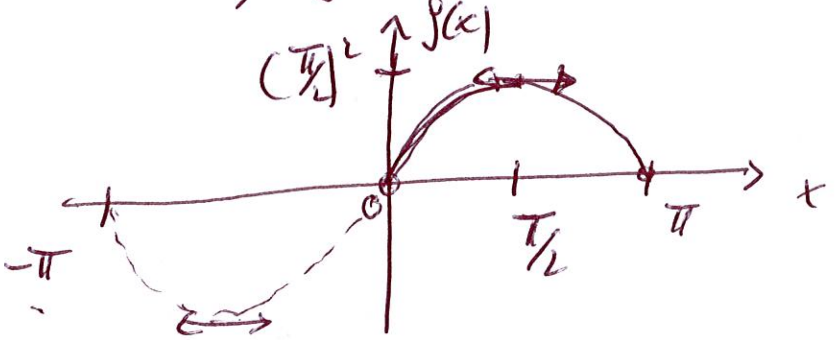
Exo Série de Fourier

1) $f(x) = x(\pi - x)$; f impaire, 2π-périodique pour $x \in [0, \pi]$

a)



$f'(x) = (\pi - x) - x = \pi - 2x$

$f'(x) = 0 \iff x = \frac{\pi}{2}$ (pour $x \in [0, \pi]$).

$f(\pi/2) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2$

b) f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ tout entier et f 2π-périodique. Donc f est développable en Série de Fourier.

f impaire $\Rightarrow a_n = 0 \ \forall n$

$$S(x) = \sum_{n \geq 1} b_n \sin(\omega n x)$$ avec $\omega = 1$.

Calculons : $b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x(\pi - x) \sin(nx)\, dx \quad \forall n \geq 1$

IPP $u = x(\pi - x)$; $v' = \sin(nx)$

On obtient :

$$b_n = \frac{2}{\pi}\left[\frac{-x(\pi-x)\cos nx}{n}\right]_0^{\pi} + \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{n}(\pi-2x)\cos dx$$

IPP $u = \pi - 2x$; $v' = \cos nx$

D'où $b_n = \dots = -4\left(\frac{\cos nx}{n^3}\right)_0^{\pi}$

$$\Rightarrow \boxed{b_n = \frac{4}{n^3}\left[(-1)^{n+1}+1\right] \quad \forall n \geq 1}$$

soit $\forall n \geq 1$ $\begin{cases} b_{2n} = 0 \\ b_{2n+1} = \dfrac{8}{\pi(2n+1)^3} \end{cases}$

D'où : $\boxed{S(x) = \frac{8}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}\cdot\sin(2n+1)x}$

Rem: On a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = S(x)$

2) a) Calcul de $A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}$

Si on pose $x = \pi/2$, on a :

$\forall n \geq 0$, $\sin(2n+1)x = (-1)^k$ avec $k = (2n+1)$
$k \geq 1$

Et $f(\pi/2) = \frac{\pi^2}{4} = S\left(\frac{\pi}{2}\right)$

D'où : $\boxed{A = \frac{\pi^3}{32}}$

b) Calcul de $B = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{(2k+1)^6}$

Tentons d'appliquer l'égalité de Parseval...

On obtient :

$$\frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} \frac{64}{\pi^2} \frac{1}{(2n+1)^6} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 (\pi - x)^2 dx$$

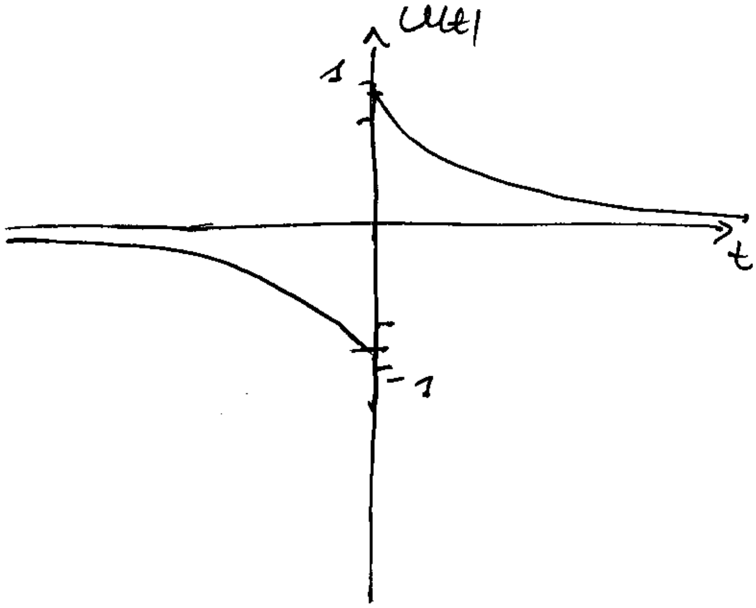
$$= \dots = \left[\frac{x^5}{5} - 2\pi \frac{x^4}{4} + \pi^2 \frac{x^3}{3}\right]_0^{\pi}$$

Soit :

$\boxed{B = \frac{\pi^6}{960}}$

Exo. Calcul d'une T.F.

$$u(t) = \begin{cases} e^{-t} & \text{si } t>0 \\ -e^{t} & \text{si } t<0 \end{cases}$$



On remarque que :

$\forall t>0 \quad u(\overbrace{-t}^{<0}) = -e^{-t} = -u(\overbrace{t}^{>0})$

$\forall t<0 \quad u(-t) = +e^{t} = -u(\underbrace{t}_{<0})$

$\Rightarrow$ u est impaire.

$$\hat{u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} u(t)\, e^{-2i\pi\xi t}\, dt$$

$$= -\int_{-\infty}^{0} e^{t} e^{-2i\pi\xi t}\, dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-t} e^{-2i\pi\xi t}\, dt$$

Or, pour u réelle et impaire, on a $\hat{u}(\xi)$ imaginaire pure et impaire (cf cours) avec :

$$\hat{u}(\xi) = 2i \int_{0}^{+\infty} u(x) \sin(2\pi\xi x)\, dx$$

$$\Rightarrow \hat{u}(\xi) = 2i \underbrace{\int_{0}^{+\infty} e^{-x} \sin(2\pi\xi x)\, dx}_{=I}$$

Calculons I par I.P.P :

$$I = \underbrace{\left[-e^{-x} \sin(2\pi\xi x)\right]_{0}^{+\infty}}_{=0} + (2\pi\xi) \int_{0}^{+\infty} e^{-x} \cos(2\pi\xi x)\, dx$$

$$I = 2\pi\xi \underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos(2\pi\xi x)\,dx}_{=J}.$$

Par une IPP,

$$J = \left[-e^{-x}\cos(2\pi\xi x)\right]_0^{+\infty} - (2\pi\xi)\underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-x}\sin(2\pi\xi x)\,dx}_{=I}$$

$$= -1 - 2\pi\xi \cdot I$$

D'où :

$$\hat{u}(\xi) = 2i \times 2\pi\xi \times (-1 - 2\pi\xi \times I)$$

Aussi : $I = 2\pi\xi\,(-1 - 2\pi\xi \times I)$.

$$\Rightarrow I = -2\pi\xi - 4\pi^2\xi^2 \cdot I.$$

$$\Rightarrow \boxed{I = \frac{-2\pi\xi}{1+4\pi^2\xi^2}} \quad \text{pour } \xi \neq 0.$$

et $I = 0$ pour $\xi = 0$.

Donc :

$$\hat{u}(\xi) = 4\pi\xi\, i\left(-1 + \frac{4\pi^2\xi^2}{1+4\pi^2\xi^2}\right) \; ; \; \xi \neq 0.$$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{u}(\xi) = i\,4\pi\xi\left(\frac{-1}{1+4\pi^2\xi^2}\right)} \; , \; \xi \neq 0.$$

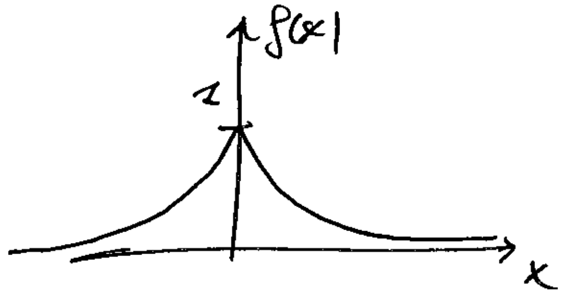
Et $\hat{u}(0) = 0$.

Exo Calcul d'une T. F.

1. $f(x) = e^{-a|x|}$ $\quad a > 0$

f paire

(1)



$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\underbrace{f(x)}_{\text{paire}} \underbrace{\cos(2\pi\xi x)}_{\text{paire}}}_{\text{paire}} dx - i \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \underbrace{\underbrace{f(x)}_{\text{paire}} \underbrace{\sin(2\pi\xi x)}_{\text{impaire}}}_{\text{impaire}} dx}_{=0}$$

$$\Rightarrow \hat{f}(\xi) = 2\int_0^{+\infty} f(x) \cos(2\pi\xi x)\, dx$$

$$= 2\int_0^{+\infty} \underbrace{e^{-ax}}_{v} \underbrace{\cos(2\pi\xi x)}_{u'}\, dx$$

$u = \frac{1}{2\pi\xi}\sin(2\pi\xi x)$

$v' = -a e^{-ax}$

$$= \frac{2}{2\pi\xi}\underbrace{\left[\sin(2\pi\xi x)\, e^{-ax}\right]_0^{+\infty}}_{=0} + \frac{2a}{2\pi\xi}\int_0^{+\infty} \sin(2\pi\xi x)\, e^{-ax}\, dx$$

pour $\xi \neq 0$

$$= \frac{a}{\pi\xi}\int_0^{+\infty} \underbrace{\sin(2\pi\xi x)}_{u'} \underbrace{e^{-ax}}_{v}\, dx$$

$u = \frac{-1}{2\pi\xi}\cos(2\pi\xi x)$

$v' = -a e^{-ax}$

$$= \frac{a}{\pi\xi}\frac{-1}{2\pi\xi}\left[\cos(2\pi\xi x)\, e^{-ax}\right]_0^{+\infty} + \frac{-a^2}{\pi\xi\cdot 2\pi\xi}\int \cos(2\pi\xi x)\, e^{-ax}\, dx$$

$$= \frac{+a}{2\pi^2\xi^2} - \frac{a^2}{2\pi^2\xi^2}\cdot\frac{1}{2}\hat{f}(\xi)$$

$$\Rightarrow \hat{f}(\xi) = \frac{+a}{2\pi^2\xi^2} - \frac{a^2}{4\pi^2\xi^2}\,\hat{f}(\xi)$$

$$\Rightarrow \hat{f}(\xi)\left(\frac{4\pi^2\xi^2}{4\pi^2\xi^2} + \frac{a^2}{4\pi^2\xi^2}\right) = \frac{+a}{2\pi^2\xi^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{f}(\xi) = \frac{+\cancel{4\pi^2\xi^2}\,2a}{\cancel{2\pi^2\xi^2}(4\pi^2\xi^2+a^2)}} = \underline{\frac{+2a}{4\pi^2\xi^2+a^2}\ ,\ \xi \neq 0}$$

Et $\hat{f}(0) = 2\int_0^{+\infty} e^{-ax}\,dx = \frac{-2}{a}\left[e^{-ax}\right]_0^{+\infty} = \frac{2}{a}$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{f}(0) = \frac{2}{a}}$$

---

2. $g(x) = e^{-a|x|} * e^{-b|x|}$ $\quad a \neq b$.

$$\Rightarrow \hat{g}(\xi) = \mathcal{F}(e^{-a|x|}) \,.\, \mathcal{F}(e^{-b|x|})$$

$$= \frac{2a}{(4\pi^2\xi^2+a^2)} \cdot \frac{2b}{(4\pi^2\xi^2+b^2)}\ ;\ \xi \neq 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{g}(\xi) = \frac{4ab}{(4\pi^2\xi^2+a^2)(4\pi^2\xi^2+b^2)}} \quad \text{pour } \xi \neq 0.$$

EXO : Résolut° EDO ordre 3 par Laplace

$$\frac{d^3y}{dt^3}(t) + 3\frac{d^2y}{dt^2}(t) + 3\frac{dy}{dt}(t) + y(t) = e^{-t}$$

$$t \geq 0$$

$$y(0) = \frac{dy}{dt}(0) = \frac{d^2y}{dt^2}(0) = 0$$

On pose : $U = \mathcal{L}(y)$. On suppose que $y(t)$ vérifie les cdts (suffisantes) d'existence de $\mathcal{L}(y)$.

On applique $\mathcal{L}$ à l'EDO. Par linéarité de $\mathcal{L}$ et en tenant compte des C.I., on obtient :

$$\mathcal{L}(y^{(3)}(t)) + 3\,\mathcal{L}(y^{(2)}(t)) + 3\,\mathcal{L}(y^{(1)}(t)) + \mathcal{L}(y(t)) = \mathcal{L}(e^{-t})$$

avec :

$$\mathcal{L}(e^{-t})(p) = \frac{1}{p+1} \quad \forall p > -1$$

$$\mathcal{L}(y^{(1)}(t))(p) = p\,\mathcal{L}(y).$$

$$\mathcal{L}(y^{(2)})(p) = p^2\,\mathcal{L}(y) \; ; \; \mathcal{L}(y^{(3)})(p) = p^3\,\mathcal{L}(y).$$

D'où :

$$\boxed{p^3 U(p) + 3p^2 U(p) + 3p\,U(p) + U(p) = 1/(p+1)}$$

$$\forall p > -1$$

On obtient alors :

$$\underbrace{\left(p^3 + 3p^2 + 3p + 1\right)}_{=(p+1)^3} \mathcal{U}(p) = \frac{1}{(p+1)} \qquad p > -1$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{U}(p) = \frac{1}{(p+1)^4}, \quad p > -1}$$

- T. de Laplace inverse :

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(p+1)^4}\right)(t)$$

Testons la fct originale : $g(t) = \frac{t^3}{3!} e^{-t}$

$$\mathcal{L}(g)(p) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{6} t^3 e^{-(p+1)t}\, dt$$

$$\underset{IPP}{=} \text{etc} = \frac{1}{(p+1)^4}.$$

Intuité suite à lecture de la table et du TD#1 exo3

On a donc :

$$\boxed{y(t) = \frac{1}{6} t^3 e^{-t} \qquad \forall t \geq 0}$$