INSA Toulouse, cycle préparatoire.
Mathématiques

Corrigé

Exercice 1. Images de fonctions par la transformée de Laplace

I) Calculer les transformées de Laplace des fonctions suivantes, et prééciser leur ensemble de dééfinition :
1- $f(t) = e^{at} \cos\omega t$,
2- $f(t) = e^{at} \sin\omega t$,
3- $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$. *(On suppose montréé que :* $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$*).*

II) Montrer que $f(t) = \frac{1}{t}$ n'admet pas d'image F.

Corrigé.
1.
En utilisant le théé oréème du déplacement (translation en var. duale), on a : $\mathcal{L}(e^{at} \cos\omega t)(p) = \mathcal{L}(\cos\omega t)(p-a)$.
et donc en utilisant la table du couyrs, on obtient :

$$\mathcal{L}(e^{at} \cos\omega t)(p) = \frac{p-a}{(p-a)^2+\omega^2} \quad , \ p > a$$

2. On obtient de même :

$$\mathcal{L}(e^{at} \sin\omega t)(p) = \frac{\omega}{(p-a)^2+\omega^2} \quad , \ p > a$$

3. On a :

$$\mathcal{L}(\frac{1}{\sqrt{t}}) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} \frac{1}{\sqrt{t}} dt$$

a) Etudions la convergence de cette intéégrale.
En $+\infty$, l'intégrale est convergente si et seulement si $p > 0$ (croissance comparéée polynéôme et exponentielle déécroissante; possibilité éégalement de prééciser les ééquivalents).
En 0, et pour $p > 0$, de même l'intéégrale est convergente en vertu croissance

comparée polynôme et exponentielle décroissante.
Donc la fonction $f(t)$ admet une transforméée de Laplace pour tout $p > 0$.

b) Calcul de l'intégrale.
On effectue le changement de variable $x = \sqrt{p\,t}$, ce qui donne :

$$\mathcal{L}(\frac{1}{\sqrt{t}})(p) = \frac{2}{\sqrt{p}} \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx$$

Or nous avons vu que : $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$, donc :

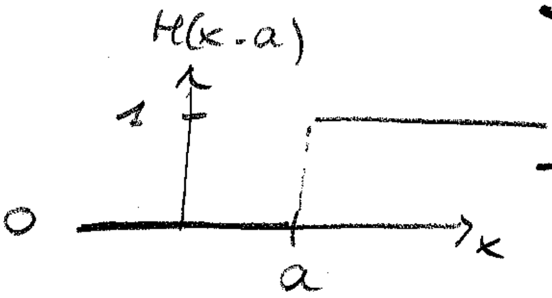
$$\mathcal{L}(\frac{1}{\sqrt{t}})(p) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{p}} \quad p > 0$$

TD 1.

Transformées de signaux de base

Exo 2.

□

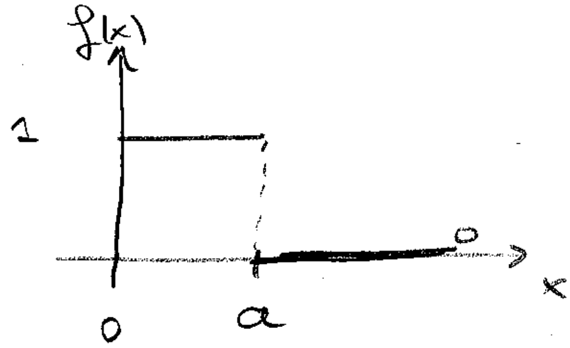


On a vu : - Translation $\mathcal{L}(f(x-a))_{(p)} = e^{-pa}\,\mathcal{L}(f(x))$

- Heaviside $\mathcal{L}(H)_{(p)} = \dfrac{1}{p}$ $p \neq 0$

d'où $\mathcal{L}(H(x-a))_{(p)} = e^{-pa}\dfrac{1}{p}$. $p \neq 0$.

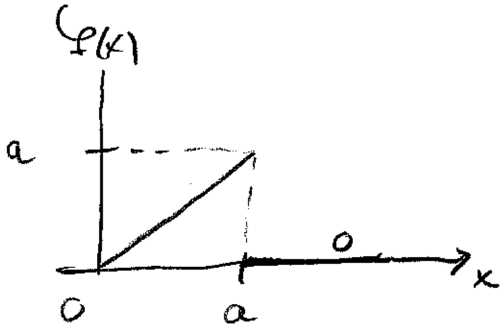
□

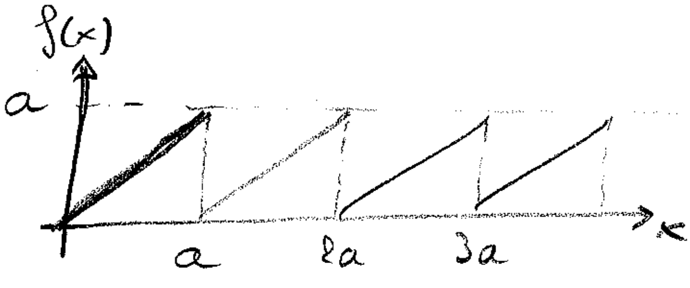


$$\mathcal{L}(f)_{(p)} = \int_0^a e^{-px}\,dx = \frac{-1}{p}\left(e^{-pa} - 1\right), \quad p \neq 0.$$

ou encore $f_{(x)} = 1 - H(x-a)$ d'où $\mathcal{L}(f)_{(p)} = \mathcal{L}(1)_{(p)} - \mathcal{L}(H(x-a))_{(p)}$
$= \ldots$

□ Dent de scie périodique.





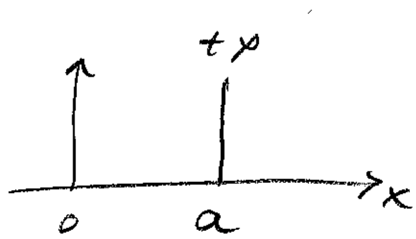
$\mathcal{L}(f(x)) = \sum_{n \geq 0} \mathcal{L}(\varphi(x-na))$ par linéarité de l'opérateur $\mathcal{L}$.

Et $\mathcal{L}(\varphi(x-na)) = e^{-pna}\, \mathcal{L}(\varphi(x))$

avec
$$\mathcal{L}(\varphi(x))(p) = \int_0^a \underbrace{x}_{v}\, \underbrace{e^{-px}}_{u'}\, dx$$
$$\underset{I.P.P}{=} \left[-\frac{1}{p} e^{-px} x\right]_0^a + \frac{1}{p}\int_0^a e^{-px}\, dx$$
$$= -\frac{a}{p} e^{-pa} - \frac{1}{p^2}\left(e^{-pa} - 1\right), \quad p \neq 0.$$

On a alors :
$$\mathcal{L}(f(x))(p) = \left(\sum_{n \geq 0} e^{-pna}\right) \times \mathcal{L}(\varphi(x))(p)$$
$$= \frac{(1-0)}{(1-e^{-pa})} \times \overbrace{\left[\frac{1}{p^2}\left(1-e^{-pa}\right) - \frac{a e^{-pa}}{p}\right]}^{= \mathcal{L}(\varphi(x))(p)}$$
$$\Rightarrow \mathcal{L}(f(x))(p) = \frac{1}{p^2} - \frac{a}{p\,(a^{+pa}-1)}, \quad p \neq 0.$$

□ Dirac décalé : $\delta_a(x) = \delta(x-a)$



$$\mathcal{L}(\delta_a) = e^{-pa}\, \mathcal{L}(\delta)$$
$$= e^{-pa}$$

EKO **Fcts originales (Transformées inverses)**

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{6}{2p-3} - \frac{3+4p}{9p^2-16} + \frac{8-6p}{16p^2+9}\right)$$

$$= 3\,\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p-3/2}\right) - \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p^2-16/9}\right) \quad \text{par } \underline{\text{linéarité de } \mathcal{L}^{-1}}$$

$$- \frac{4}{9}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{p}{p^2-16/9}\right) + \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p^2+9/16}\right) - \frac{3}{8}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{p}{p^2+9/16}\right)$$

Ce qui donne d'après la table des images déjà calculées :

$$\mathcal{L}^{-1}(-) = 3e^{3x/2} - \frac{1}{4}\,\mathrm{sh}\left(\frac{4x}{3}\right) - \frac{4}{9}\,\mathrm{ch}\left(\frac{4x}{3}\right) + \frac{2}{3}\sin\left(\frac{3x}{4}\right) - \frac{3}{8}\cos\left(\frac{3x}{4}\right)$$

et ce pour $x \in \mathbb{R}^+$.

---

4. On remarque que :

$$p^2 - 4p + 20 = (p-2)^2 + 16$$
$$= (p-2)^2 + 4^2$$

D'où :
$$\frac{6p-4}{p^2-4p+20} = 6\,\frac{(p-2)}{(p-2)^2+4^2} + \frac{4}{(p-2)^2+4^2}$$

Et donc : $\mathcal{L}^{-1}(\text{—})$

$$= 6\,e^{2x}\cos(4x) + 2\,e^{2x}\sin(4x)$$ linéarité de $\mathcal{L}^{-1}$ + lecture Table

$$= 2e^{2x}\left[3\cos(4x) + \sin(4x)\right], \quad x \in \mathbb{R}^+$$

$$\begin{cases} y^{(3)} - 3y^{(2)} + 3y^{(1)} - y = t^2e^{+t} &, t \geqslant 0 \\ y(0) = 0, \ y^{(1)}(0) = 0 \text{ et } y^{(2)}(0) = -2 : \text{C.I.} \end{cases}$$

1- Transformée de Laplace de l'équa différentielle :

$$\mathcal{L}\left(y^{(3)} - 3y^{(2)} + 3y^{(1)} - y - t^2e^t\right)(p) = 0 \quad \forall p.$$

$$\Rightarrow \left(p^3 \mathcal{L}(y)_{(p)} + 2\right) - 3p^2\mathcal{L}(y)_{(p)} + 3p\mathcal{L}(y)_{(p)} - \mathcal{L}(y)_{(p)} = \dots$$

car $\mathcal{L}(.)$ est un op. linéaire et $\mathcal{L}(x^{(k+1)}(t))_{(p)} = p\mathcal{L}(x^{(k)})_{(p)} - x^{(k)}(0)$

D'où :

$$\left(p^3 - 3p^2 + 3p - 1\right)\mathcal{L}(y)_{(p)} + 2 = \mathcal{L}(t^2e^t)(p)$$

On a vu que : $\mathcal{L}(t^2e^t)_{(p)} = F^{(2)}(p)$ avec $F(p) = \mathcal{L}(e^t)_{(p)}$

et $\mathcal{L}(e^t)_{(p)} = \dfrac{1}{p-1}$, $p > 1$.

$$\Rightarrow \mathcal{L}^{(2)}(e^t)(p) = \frac{2}{(p-1)^3}, \quad p > 1.$$

Ce qui donne :

$$\underline{\mathcal{L}(y)_{(p)} = \frac{2\left(\frac{1}{(p-1)^3} - 1\right)}{p^3 - 3p^2 + 3p - 1}}$$

$p > 1$ et p tq $p^3 - 3p^2 + 3p - 1 \neq 0$

On remarque que $+1$ est ~~un zéro~~ une racine de p^3-3p^2+3p-1. Soit :

$$F(p)=\mathcal{L}(y)_{(p)}=\frac{2}{(p-1)\underbrace{(p^2-2p+1)}_{+1 \text{ est racine}}}\left(\frac{1}{(p-1)^3}-1\right)$$

$$=\frac{2}{(p-1)(p-1)(p-1)}\left(\frac{1}{(p-1)^3}-1\right)$$

$$\Rightarrow \quad F(p)=\frac{2}{(p-1)^6}-\frac{2}{(p-1)^3} \qquad p>1$$

2- Transformée inverse (retour à la fonction originale).

Par linéarité de l'opérateur $\mathcal{L}^{-1}$, on obtient :

$$y(t)=2\cdot e^t\frac{t^5}{5!}-2\,e^t\frac{t^2}{2!},\quad t\geq 0.$$

Pour rappel, on a : $\mathcal{L}\left(\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\right)_{(q)}=\frac{1}{q^n},\ q>0.$

et $F(p-a)=\mathcal{L}(e^{at}f(t))_{(p)}$

pour $F(p)=\mathcal{L}(f)_{(p)}$

d'où : $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(p-1)^n}\right)_{(t)}=e^t\,\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\quad t\geq 0.$

La sol° de l'equ différentielle est donc :

$$y(t) = \frac{1}{30} t^5 e^t - t^2 e^t \quad \text{pour } t \geq 0.$$

$$= t^2 e^t \left(\frac{1}{30} t^3 - 1\right) \quad , t \geq 0.$$

NB. Par ailleurs, on ~~la~~ retrouve bien entendu :

$y(0) = 0$; $y'(0) = 0$ et

$y''(0) = -2$ (vérification pas difficile)

$$\begin{cases} y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = e^{-t} & t > 0 \\ y(0) = 0 \quad , \quad y'(0) = 1 \end{cases}$$

1. Transformée de Laplace de l'équ différentielle.

Par linéarité de l'op. $\mathcal{L}$, on obtient :

$$\left(p^2 F(p) - 1\right) + 3p\,F(p) + 2F(p) = \mathcal{L}(e^{-t})(p)$$

avec la notation $F(p) = \mathcal{L}(y(t))(p)$.

D'où :

$$F(p) = \frac{1}{p^2+3p+2}\left(\frac{1}{p+1} + 1\right) \quad p > -1$$
p tq $p^2+3p+2 \neq$

On remarque que (-1) est racine du polynôme p^2+3p+2

On obtient alors :

$$F(p) = \frac{1}{(p+1)(p+2)}\left(\frac{1}{(p+1)} + 1\right), \quad p > -1.$$

Et une décomposition en élts simples donne :

$$G_1(p) = \frac{1}{(p+1)(p+2)} = \frac{a}{p+1} + \frac{b}{p+2}$$ (cf Regroupement 1) avec $\begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$

Savoir le faire !

$$G_2(p) = \frac{1}{(p+1)^2(p+2)} = \frac{c}{(p+1)^2} + \frac{d}{(p+2)} + \frac{e}{(p+1)} \quad \text{avec} \begin{cases} c = 1 \\ d = 1 \\ e = -1 \end{cases}$$

(méthodologie cf R1.)

car: $\bullet\ (p+1)^2 G(p)\Big|_{p=-1} = c = 1$

$\bullet\ (p+2)\cdot G(p)\Big|_{p=-2} = d = 1$

$\bullet\ \lim_{p\to+\infty} (p+1)G(p)$ ~~donne~~ la relat°: $0 = 1 + e$

• On obtient: $(F(p) = G_1(p) + G_2(p))$,

$F(p) = \frac{1}{(p+1)^2}, p > -1.$

---

2. Transformée inverse (retour à la fonction originale)

On a déjà vu que: $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(p-a)^n}\right)(t) = e^{at}\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$ $t \geq 0$

D'où la sol° de l'eqn différentielle est:

$$\boxed{y(t) = te^{-t} \quad t \geq 0}$$

NB. On retrouve bien la C.I. $y(0) = 0$ $y'(0) = 1$.
et l'eqn diff^{elle} $y'' + 3y' + 2y(t) = e^{-t}$