Transformation de Laplace à l'usage des ingénieurs

Définitions

Soit $f(t)$ une fonction réelle définie $\forall t \geq 0$. La transformée de Laplace de f, $\mathcal{L}(f(t))$ est :

$$\mathcal{L}\big(f(t)\big) = F(p) = \int_0^{\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t$$

Cette intégrale n'existe que si $|f(t)| \leq K\,\mathrm{e}^{at}$.

On peut définir la transformée de Laplace inverse :

$$\mathcal{L}^{-1}\big(F(p)\big) = \mathcal{L}^{-1}\big(\mathcal{L}(f(t))\big) = f(t)$$

Propriétés

Opérations algébriques

- Linéarité de la transformation
$$\mathcal{L}\big(a\,f(t) + b\,g(t)\big) = a\,F(p) + b\,G(p)$$
- Changement d'échelle de la transformée
$$\mathcal{L}\left(\frac{1}{a}\,f\left(\frac{t}{a}\right)\right) = F(a \cdot p)$$
- Translation de la transformée
$$\mathcal{L}\big(\mathrm{e}^{a\,t}\,f(t)\big) = F(p-a)$$

Opérations analytiques

- Transformée des dérivées
$$\mathcal{L}\big(f'(t)\big) = p\,F(p) - f(0)$$
$$\mathcal{L}\big(f''(t)\big) = p^2\,F(p) - p\,f(0) - f'(0)$$
$$\mathcal{L}\big(f^{(n)}(t)\big) = p^n\,F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$$
- Transformée d'une intégrale
$$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(u)\,\mathrm{d}u\right) = \frac{1}{p}\,F(p)$$
- Dérivée de la transformée
$$\mathcal{L}\big(t\,f(t)\big) = -F'(p)$$
- Intégrale de la transformée
$$\mathcal{L}\left(\frac{f(t)}{t}\right) = \int_p^{\infty} F(u)\,\mathrm{d}u$$

Théorèmes

- Théorème de la valeur initiale
$$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{p\to\infty} p\,F(p)$$
- Théorème de la valeur finale
$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{p\to 0} p\,F(p)$$
- Théorème de convolution

si $\quad F(p) = \mathcal{L}\big(f(t)\big) \quad$ et $\quad G(p) = \mathcal{L}\big(g(t)\big)$

alors $\quad \mathcal{L}^{-1}\big(F(p)\cdot G(p)\big) = (f * g)(t)$

où $\quad (f * g)(t)$ est le produit de convolution de $f(t)$ et $g(t)$

$F(p) = \mathcal{L}(f(t))$	$f(t)$
$\frac{1}{p}$	1
$\frac{1}{p^2}$	t
$\frac{1}{p^n}$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$
$\frac{1}{\sqrt{p}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$
$\frac{1}{\sqrt{p-a}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{at}$
$\frac{1}{p-a}$	e^{at}
$\frac{1}{(p-a)^2}$	$t\, e^{at}$
$\frac{1}{(p-a)^n}$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{at}$
$\frac{1}{(p-a)(p-b)} \quad (a \neq b)$	$\frac{e^{at} - e^{bt}}{a-b}$
$\frac{p}{(p-a)(p-b)} \quad (a \neq b)$	$\frac{a\, e^{at} - b\, e^{bt}}{a-b}$
$\frac{1}{p^2+a^2}$	$\frac{1}{a} \sin at$
$\frac{p}{p^2+a^2}$	$\cos at$
$\frac{1}{p^2-a^2}$	$\frac{1}{a} \operatorname{sh} at$
$\frac{p}{p^2-a^2}$	$\operatorname{ch} at$
$\frac{1}{\sqrt{p^2+a^2}}$	$J_0(at)$ (fonction de Bessel)
$\frac{1}{\sqrt{p^2-a^2}}$	$I_0(at)$ (fonction de Bessel modifiée)
e^{-ap}	$\delta(t-a)$ (fonction impulsion *delta* de Dirac)
$\frac{e^{-ap}}{p}$	$H(t-a)$ (fonction échelon de Heaviside)
$\frac{e^{-a\sqrt{p}}}{p}$	$\operatorname{erfc}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right) = 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)$
$\frac{e^{-a\sqrt{p}}}{p^2}$	$\left(t + \frac{a^2}{2}\right) \cdot \operatorname{erfc}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right) - a \cdot \sqrt{\frac{t}{\pi}} \cdot e^{-\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)^2}$

Fonction *erreur* et fonctions associées

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-u^2)\,\mathrm{d}u \qquad \mathrm{erfc}(x) = 1 - \mathrm{erf}(x)$$

x	$\mathrm{erf}(x)$	$\mathrm{erfc}(x)$	$e^{x^2}\mathrm{erfc}(x)$
0,00	0,0000000	1,0000000	1,00000
0,05	0,0563720	0,9436280	0,94599
0,10	0,1124629	0,8875371	0,89646
0,15	0,1679960	0,8320040	0,85094
0,20	0,2227026	0,7772974	0,80902
0,25	0,2763264	0,7236736	0,77035
0,30	0,3286268	0,6713732	0,73460
0,35	0,3793821	0,6206179	0,70150
0,40	0,4283924	0,5716076	0,67079
0,45	0,4754817	0,5245183	0,64225
0,50	0,5204999	0,4795001	0,61569
0,55	0,5633234	0,4366766	0,59093
0,60	0,6038561	0,3961439	0,56780
0,65	0,6420293	0,3579707	0,54618
0,70	0,6778012	0,3221988	0,52593
0,75	0,7111556	0,2888444	0,50694
0,80	0,7421010	0,2578990	0,48910
0,85	0,7706681	0,2293319	0,47233
0,90	0,7969082	0,2030918	0,45653
0,95	0,8208908	0,1791092	0,44164
1,00	0,8427008	0,1572992	0,42758
1,05	0,8624361	0,1375639	0,41430
1,10	0,8802051	0,1197949	0,40173
1,15	0,8961238	0,1038762	0,38983
1,20	0,9103140	0,0896860	0,37854
1,25	0,9229001	0,0770999	0,36782

x	$\mathrm{erf}(x)$	$\mathrm{erfc}(x)$	$e^{x^2}\mathrm{erfc}(x)$
1,25	0,9229001	0,0770999	0,36782
1,30	0,9340079	0,0659921	0,35764
1,35	0,9437622	0,0562378	0,34796
1,40	0,9522851	0,0477149	0,33874
1,45	0,9596950	0,0403050	0,32996
1,50	0,9661051	0,0338949	0,32159
1,55	0,9716227	0,0283773	0,31359
1,60	0,9763484	0,0236516	0,30595
1,65	0,9803756	0,0196244	0,29865
1,70	0,9837905	0,0162095	0,29166
1,75	0,9866717	0,0133283	0,28497
1,80	0,9890905	0,0109095	0,27856
1,85	0,9911110	0,0088890	0,27241
1,90	0,9927904	0,0072096	0,26651
1,95	0,9941793	0,0058207	0,26084
2,00	0,9953223	0,0046777	0,25540
2,10	0,9970205	0,0029795	0,24512
2,20	0,9981372	0,0018628	0,23559
2,30	0,9988568	0,0011432	0,22674
2,40	0,9993115	0,0006885	0,21850
2,50	0,9995930	0,0004070	0,21081
2,60	0,9997640	0,0002360	0,20361
2,70	0,9998657	0,0001343	0,19687
2,80	0,9999250	0,0000750	0,19055
2,90	0,9999589	0,0000411	0,18460
3,00	0,9999779	0,0000221	0,17900