Transformée de Laplace

par J. Monnier, professeur INSA Toulouse.

Jerome.Monnier@insa-toulouse.fr

Janvier 2019

Résumé

Introduction à la transformée de Laplace et son utilisation pour résoudre des Equations Différentielles Ordinaires linéaires (EDO) d'ordre n.
Public visé : étudiants, professionnels en formation continue, cycle préparatoire de notre école d'ingénieur INSA.

Table des matières

Pierre-Simon Laplace (1749 -1827) est un mathématicien, astronome, physicien et homme politique français, contemporain de la période napoléonienne. Il a apporté des contributions fondamentales dans différents champs de la théorie des probabilité, des mathématiques et de l'astronomie.

1 Introduction

Soit f une fonction de R à valeurs dans C (voire C^n donc aussi potentiellement dans R^n ou R). La transformée de Laplace de $f(x)$ notée $\mathcal{L}(f(x))$ est un opérateur intégral conduisant à une nouvelle fonction de p, p la variable duale (p indépendante de x). On note la transformée $F(p)$:

$$\mathcal{L} : f(x) \mapsto F(p) = \mathcal{L}(f(x))(p).$$

Cette transformation mathématique fut introduite par P.-S. Laplace dans un cadre théorique de probabilités.

La transformée de Laplace a la particularité de transformer très simplement la dérivée de la fonction originale f. En effet on a :

$$\mathcal{L}(f'(x))(p) = pF(p) – (0)$$

Cette propriété permet un traitement simple des Equations Différentielles Ordinaires *linéaires* (EDO) d'ordre n (avec $n \geq 2$ possible). Il suffit de transposer l'équation différentielle dans le domaine de Laplace pour obtenir une équation algébrique relativement simple à manipuler et résoudre.

Pour revenir dans l'espace original (e.g. temporel), contrairement à la transformée de Fourier nous ne disposons pas d'expression *explicite simple* de la transformée *inverse* $\mathcal{L}^{-1}$. Mais comme $\mathcal{L}$ est injective, par le calcul et l'*usage de tables* il est possible d'inverser les images obtenues. (En fait la transformée inverse $\mathcal{L}^{-1}$ est une intégrale dans le plan complexe qui n'est en pratique pas utilisée).

Du fait de ces propriétés, la transformée de Laplace est utilisée en *automatique* et *asservissement* pour *déterminer la fonction de transfert d'un système linéaire.*

Contrairement à la transformée de Fourier $\mathcal{F}$ qui est utilisée pour la détermination du spectre d'un signal f, $\mathcal{L}$ tient compte de l'existence du régime transitoire précédant le régime permanent. Par exemple, la prise en compte de l'allure du signal avant et après la mise en marche d'un générateur de fréquence [1].

Parmi les pré-requis à ce cours figurent les *intégrales généralisées* et la *décomposition en éléments simples de fractions rationnelles.* Des notes de cours sur ces sujets vous sont proposées en complément du présent manuscrit de cours.

1. Remarque issue de pages Wikipédia

2 Définitions & fondamentaux

2.1 Définition de cette transformée de Laplace $\mathcal{L}(\cdot)$

Soit $f(x)$ une fonction de R à valeurs dans C ou R.

On appelle *fonction causale* une fonction définie sur R dont le support est borné à gauche en 0 i.e. f est nulle pour tout $x < 0$.

Etant donnée une fonction g non causale, il suffit de considérer $f(x) = H(x)g(x)$, H la fonction de Heaviside, pour obtenir la fonction correspondante en version causale.

Dans tout ce cours nous supposerons que toutes les fonctions originales $f(x)$ sont de partie réelle causale : $\mathcal{R}(f(x)) = 0$ pour $x < 0$.

Définition 1. Soit $f(x)$ une fonction causale (ou de partie réelle causale).
On appelle transformée de Laplace la fonction $F(p) = \mathcal{L}(f(x))(p)$ qui vérifie :

$$\boxed{F(p) = \int_0^{+\infty} f(x) \exp(-px)\, dx} \tag{2.1}$$

Terminologie. $F(p)$ est l'image de l'originale $f(x)$; x la variable primale ; p la variable duale.

A noter que p pourrait être une variable complexe. Dans la pratique, p variable réelle est bien souvent suffisant. Dans toute la suite on suppose que p est une variable réelle.

2.2 Conditions d'existence de cette transformée de fonction

La transformée de Laplace d'une fonction est une intégrale généralisée. Celle-ci doit donc être convergente pour être bien définie.

Nous renvoyons le lecteur aux notes de cours relatives aux intégrales généralisées. Rappelons simplement qu'une condition nécéssaire (mais non suffisante...) est que l'intégrande, ici la fonction $(f(x) \exp(-px))$ tend vers 0 en $+\infty$.

Le domaine de définition $\mathcal{D}_F$ de la transformée de Laplace $F(p)$ est tout simplement l'ensemble des valeurs de p pour lesquelles l'intégrale (2.1) est convergente.

Des conditions suffisantes de convergence de cette intégrale, et donc de bonne définition de la transformée, sont les suivantes.

Proposition 2. *Soit une fonction $f(x)$ qui vérifie les trois conditions suivantes :*

- f admet une limite finie à gauche et à droite en tout point x de $]0, +\infty[$.
- $|f(x)|$ croît moins vite à l'infini qu'une certaine exponentielle.
  Plus précisément, il existe $\alpha \in R$ tel que $|f(x)| \leq cste \exp(\alpha x)$ pour $x \to +\infty$.
- $|f(x)|$ croît moins vite à l'infini en 0 qu'une certaine fonction de Riemann.
  Plus précisément, il existe $\beta \in R, \beta < 1$, tel que $|f(x)| \leq cste \frac{1}{x^\beta}$ pour $x \to 0^+$.

Alors sa transformée de Laplace $F(p)$ existe (est bien définie) pour p suffisamment grand ; plus précisément pour $p \in]\alpha, +\infty[$.
Aussi on a :

$$\lim_{p \to +\infty} F(p) = 0 \tag{2.2}$$

Eléments de démonstration. cf notes manuscrites.

On montre facilement que *si pour $p = a$ l'intégrale de Laplace est absolument convergente ($F(a)$ est bien définie), alors $F(p)$ est bien défini pour tout $p \geq a$.*

En effet, on a : $\forall p \geq a$, $0 \leq \exp(-px) \leq \exp(-ax)$ et donc :
$0 \leq |f(x)| \exp(-px) \leq |f(x)| \exp(-ax)$. D'où l'assertion.

Exemples d'existence ou non. La transformée de Laplace de $\cos(x)$, $F(p) = \mathcal{L}(\cos(x))(p)$, existe pour $p > 0$. En effet on a :
$|F(p)| \leq \int_0^{+\infty} |\cos(x)| \exp(-px)\, dx \leq \int_0^{+\infty} \exp(-px)\, dx$.
Cette intégrale est convergente pour $p > 0$.
Par contre pour $p = 0$, $F(p) = \int_0^{+\infty} \cos(x) dx$ n'admet pas de limite.
Enfin pour $p < 0$, $\lim_{p \to +\infty}(\cos(x) \exp(-px)) = +\infty$; l'intégrale correspondante est donc divergente.

On peut facilement montrer que la transformée de Laplace de $\exp(+x^2)$ par exemple n'existe pour aucune valeur de p.

2.3 Propriétés fondamentales de $\mathcal{L}(.)$

2.3.1 Linéarité

L'opérateur de Laplace est par construction un *opérateur linéaire.*

En effet, pour toute fonction$(f(x), g(x))$ qui admettent une transformée de Laplace, on a :

$$\mathcal{L}\left((f+g)(x)\right)(p) = \mathcal{L}\left(f(x)\right)(p) + \mathcal{L}\left(g(x)\right)(p) \tag{2.3}$$

$$\forall \lambda \in R,\ \mathcal{L}\left(\lambda f(x)\right)(p) = \lambda\, \mathcal{L}\left(f(x)\right)(p) \tag{2.4}$$

2.3.2 Opérateur inverse $\mathcal{L}^{-1}(.)$

La transformée de Laplace inverse $\mathcal{L}^{-1}(.)$ i.e. telle que $\mathcal{L}^{-1} \circ \mathcal{L}(f) = f$, peut s'exprimer sous la forme d'une intégrale *dans le plan complexe.* En effet à l'aide du théorème dit des résidus, on obtient que :

$$f(x) = \mathcal{L}^{-1}\left(\mathrm{F}(p)\right)(x) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma - \mathrm{i}\cdot\infty}^{\gamma + \mathrm{i}\cdot\infty} \mathrm{e}^{pt} \mathrm{F}(p)\, \mathrm{d}p \tag{2.5}$$

où γ est choisi tel que : a) suffisamment grand pour que l'intégrale soit convergente (γ doit être supérieur à la partie réelle de toute singularité de F(p)) ; b) $|F(p)|$ tend vers 0 au moins aussi rapidement que $\frac{1}{p^2}$.

En pratique i.e. pour résoudre des équations différentielles linéaires, cette expression de $\mathcal{L}^{-1}$ n'est pas utilisée. Comme déjà évoqué, on peut retrouver les inverses de transformées de Laplace usuelles à partir d'image préalablement calculées. *En pratique les images requises se trouvent désormais dans des tables de transformées de Laplace.*

Cette expression (2.5) de la transformée inverse s'appelle l'intégrale de Bromwich ou encore Fourier-Mellin.

2.3.3 Dérivation

La propriété qui suit est la propriété qui fait de la transformée de Laplace un outil de calcul essentiel dans la résolution des équations différentielles linéaires.

Proposition 3. *Soit $f(x)$ fonction causale telle que sa transformée soit bien définie sur un certain intervalle.*

Si f est de classe $C^1(R^+)$ et si f' est telle que sa transformée de Laplace est bien définie alors :

$$\boxed{\mathcal{L}\left(f'(x)\right)(p) = p\mathcal{L}\left(f(x)\right)(p) - f(0) \qquad (2.6)}$$

Démonstration. Après une IPP, on obtient :

$$\mathcal{L}\left(f'(x)\right)(p) = \left[f(x)\exp(-px)\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} (-p) f(x) \exp(-px)\, dx \tag{2.7}$$

Or nécessairement $(f(x)\exp(-px))$ tend vers 0 en $+\infty$.
D'où : $\mathcal{L}\left(f'(x)\right)(p) = -f(0) + p\int_0^{+\infty} f(x)\exp(-px)\,dx$.

Pour récurrence et sous les conditions d'existence, on obtient :

$$\boxed{\mathcal{L}\left(f^{(k+1)}(x)\right)(p) = p^{k+1}\mathcal{L}\left(f(x)\right)(p) - \sum_{i=0}^{k} p^i f^{(k-i)}(0) \qquad (2.8)}$$

Par ailleurs on a le résultat suivant sur les dérivées des transformées.

Proposition 4. *La transformée de Laplace $F(p)$ est de classe C^∞ sur son ensemble de définition, et :*

$$\forall k \geq 1,\ F^{(k)}(p) = (-1)^k\,\mathcal{L}\left(x^k f(x)\right)(p) \tag{2.9}$$

Démonstration. On a :

$$F^{'}(p) = -\int_0^{+\infty}(-x)f(x)\exp(-px)\,dx = -\mathcal{L}\left(xf(x)\right)(p) \tag{2.10}$$

Pour récurrence on obtient immédiatement le résultat.

2.3.4 Translations et changements d'échelles

On a les propriétés suivantes qui se montrent (quasi-) immédiatement.

Translation en p Si $F(p)$ est la transformée de $f(x)$ alors :
$F(p+q)$ est la transformée de $\exp(-qx)f(x)$.

En effet, on a : $F(p+q) = \int_0^{+\infty} f(x)\exp(-qx)\exp(-px)\,dx = \mathcal{L}\left(f(x)\exp(-qx)\right)(p)$.

Translation en x Soit $F(p)$ est la transformée de $f(x)$. On a : $\forall a > 0$,

$$\mathcal{L}\left(f(x-a)\right)(p) = \exp(-pa)\mathcal{L}\left(f(x)\right)(p) \tag{2.11}$$

Démonstration. Posons $g(x) = f\circ\varphi(x) = f(x-a)$ avec $\varphi(x) = (x-a)$.
On a donc :

$$\mathcal{L}\left(f(x-a)\right)(p) = \mathcal{L}\left(g(x)\right)(p) = \int_0^{+\infty} g(x)\exp(-px)\,dx$$

On effectue le changement de variable $y = (x-a)$. On obtient :

$$\mathcal{L}\left(f(x-a)\right)(p) = \int_{-a}^{+\infty} g(y+a)\exp(-p(y+a))\,dx$$

$$= \exp(-pa) \int_{-a}^{0} f(y) \exp(-py)\, dy + \exp(-pa)\mathcal{L}\left(f(x)\right)(p)$$

Et $f(x)$ fonction causale, d'où le résultat.

Changements d'échelles On a : $\forall \lambda > 0$,

$$\mathcal{L}\left(f(\lambda x)\right)(p) = \frac{1}{\lambda}\mathcal{L}\left(f(x)\right)(\frac{1}{\lambda}p) \tag{2.12}$$

Démonstration. De manière semblable au cas précédent, on montre que :

$$\mathcal{L}\left(f(\lambda x)\right)(p) = \int_{0}^{+\infty} f(\lambda x) \exp(-px)\, dx$$

On effectue le changement de variable $y = \lambda x$. On obtient :

$$\mathcal{L}\left(f(\lambda x)\right)(p) = \frac{1}{\lambda} \int_{0}^{+\infty} f(u) \exp(-p\frac{1}{\lambda}y)\, dy$$

D'où le résultat.

Valeur en $p = 0$ On peut remarquer que pour f intégrable sur R^+ :

$$F(0) = \lim_{p\to 0} F(p) = \int_{0}^{+\infty} f(x)\, dx \tag{2.13}$$

2.3.5 Transformée d'un produit de convolution

Proposition 5. *Soient f et g fonctions causales telle que leurs transformées de Laplace $F(p) = \mathcal{L}(f)(p)$ et $G(p) = \mathcal{L}(f)(p)$ soient bien définies.*

On a :

$$\boxed{\mathcal{L}\left((f * g)(x)\right)(p) = F(p) \cdot G(p)} \tag{2.14}$$

De même que la transformée de Fourier, la transformée de laplace $\mathcal{L}(.)$ transforme le produit de convolution $*$ en une multiplication.

Démonstration.
Soient f et g fonctions causales, alors leur produit de convolution se simplifie comme suit :

$$(f * g)(x) = \int_{0}^{x} f(x-y)g(y)\, dy \tag{2.15}$$

On a d'ailleurs aussi : $(f * g)(x) = \int_0^{+\infty} f(x-y)g(y)\, dy = \int_0^{+\infty} f(x)g(x-y)\, dy$.

D'où :

$$\mathcal{L}\left((f*g)(x)\right)(p) = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} f(x-y)g(y)\,dy \right)\ \exp(-px)\ dx \tag{2.16}$$

Ou encore (échange de l'ordre d'intégration en vertu du théorème de Fubini) :

$$\mathcal{L}\left((f*g)(x)\right)(p) = \int_0^{+\infty} g(y)\ \left(\int_0^{+\infty} f(x-y)\ \exp(-px)\ dx \right)\ dy \tag{2.17}$$

Après le changement de variable $t = (x-y)$ dans l'intégrale en x, on obtient :

$$\mathcal{L}\left((f*g)(x)\right)(p) = \int_0^{+\infty} g(y)\ \left(\int_0^{+\infty} f(t)\ \exp(-p(t+y))\ dt \right)\ dy \tag{2.18}$$

$$= \int_0^{+\infty} g(y)\exp(-py)\ \left(\int_0^{+\infty} f(t)\ \exp(-pt)dt \right)\ dy = \mathcal{L}\left(g\right)(p)\ \cdot\ \mathcal{L}\left(f\right)(p) \tag{2.19}$$

3 Images de fonctions usuelles

Fonction échelon (Heaviside) $H(x)$**.**

On a : $\mathcal{L}(H(x))(p) = \int_0^{+\infty} \exp(-px)\,dx = -\frac{1}{p}\left[\exp(-px)\right]_0^{+\infty}$ avec nécessairement $p > 0$. Donc :

$$\mathcal{L}(H(t))(p) = \frac{1}{p} \text{ pour } p > 0 \tag{3.1}$$

Exponentielle complexe : $\exp(i\alpha x)$**.**

Soit $\alpha \in R$. On pose : $F(p) = \mathcal{L}(\exp(i\alpha x))(p) = \int_0^{+\infty} \exp((i\alpha - p)x)\,dx$.

Concernant l'existence ou non de $F(p)$.

Notons que : $|F(p)| \leq \int_0^{+\infty} 1 \cdot \exp(-px)\,dx$; intégrale convergente pour $p > 0$ et $\forall \alpha$.

Aussi pour $p = 0$, $F(p) = \int_0^{+\infty} \exp(i\alpha x)\,dx$ n'admet pas de limite.

Enfin, on a pour $p < 0$, $\lim_{p \to +\infty} |\exp(i\alpha x)\exp(-px))| = \exp(-px)) = +\infty$ selon.

L'intégrale est donc divergente.

Calculons à présent $F(p)$.

On a : $F(p) = \frac{1}{(i\alpha - p)}\left[\exp((i\alpha - p)x\right]_0^{+\infty}$. Comme (nécessairement) on a : $\exp((i\alpha - p)x \to_{+\infty} 0$, on obtient :

$$\mathcal{L}(\exp(i\alpha x))(p) = \frac{1}{(p - i\alpha)} \ \forall \alpha \text{ et } p > 0 \tag{3.2}$$

Fonctions trigonométriques : $\cos(\alpha x)$ **et** $\sin(\alpha x)$**.**

On pose : $F(p) = \mathcal{L}(\cos(\alpha x))(p) = \int_0^{+\infty} \cos(\alpha x)\exp(-px)\,dx$; $\alpha \in R$.

De même que précédemment notons que :

$$|F(p)| \leq \int_0^{+\infty} |\cos(x)| \exp(-px)\,dx \leq \int_0^{+\infty} \exp(-px)\,dx$$

L'intégrale est convergente pour $p > 0$.

Aussi pour $p = 0$, $F(p) = \int_0^{+\infty} \cos(x)dx$ n'admet pas de limite.

Enfin, on a pour $p < 0$, $\lim_{p \to +\infty}(\cos(x)\exp(-px)) = +\infty$. L'intégrale est donc divergente.

Calculons $F(p)$. On a : $\cos(\alpha x) = \frac{1}{2}\left(\exp(i\alpha x) + \exp(-i\alpha x)\right)$.

Par linéarité de l'opérateur de Laplace, on a :

$$\mathcal{L}(\cos(\alpha x))(p) = \frac{1}{2}\mathcal{L}\left(\exp(i\alpha x)\right) + \frac{1}{2}\mathcal{L}\left(\exp(-i\alpha x)\right) \tag{3.3}$$

Donc :

$$\mathcal{L}(\cos(\alpha x))(p) = \frac{p}{(p^2 + \alpha^2)}, \forall \alpha \text{ et } p > 0 \tag{3.4}$$

De manière similaire, on montre que (exercice) :

$$\mathcal{L}(\sin(\alpha x))(p) = \frac{\alpha}{(p^2 + \alpha^2)}, \forall \alpha \text{ et } p > 0 \tag{3.5}$$

Fonction exponentielle : $\exp(\alpha x)$**.**

Soit $\alpha \in R$. On pose : $F(p) = \mathcal{L}(\exp(\alpha x))(p) = \int_0^{+\infty} \exp((\alpha - p)x)\, dx$.

On a $F(p)$ bien défini (l'intégrale est convergente) si et seulement si $(\alpha - p) < 0$.

On a : $F(p) = \frac{1}{(\alpha-p)} [\exp((\alpha - p)x]_0^{+\infty}$. D'où :

$$\mathcal{L}(\exp(\alpha x))(p) = \frac{1}{(p-\alpha)} \text{ pour } p > \alpha. \tag{3.6}$$

Fonctions hyperboliques : $\cosh(x)$ **et** $\sinh(x)$**.**

Rappelons que l'on a par définition : $\cosh(x) = \frac{1}{2}(\exp(x) + \exp(-x))$ et $\sinh(x) = \frac{1}{2}(\exp(x) - \exp(-x))$.

Par linéarité de l'opérateur de Laplace, on a : $\mathcal{L}(\cosh(x))(p) = \frac{1}{2}(\mathcal{L}((\exp(x))(p) + \mathcal{L}(\exp(-x))(p))$.

On obtient :

$$\mathcal{L}(\cosh(x))(p) = \frac{p}{(p^2-\alpha^2)} \text{ pour } p > \alpha. \tag{3.7}$$

De manière semblable, on obtient :

$$\mathcal{L}(\sinh(x))(p) = \frac{\alpha}{(p^2-\alpha^2)} \text{ pour } p > \alpha. \tag{3.8}$$

Monômes x^k **et polynômes** $\sum_k a_k x^k$**.**

Soit k entier, $k \geq 1$. On calcule la T.L. de la fonction causale $(H(x)x^k)$; H fonction Heaviside.

On pose : $F(p) = \mathcal{L}(H(x)x^k)(p) = \int_0^{+\infty} x^k \exp(-px)\, dx$.

L'intégrale est convergente si et seulement si $p > 0$.

Le calcul de cette intégrale peut s'effectuer par IPP pour $k = 1$ puis $k = 2$ etc. *(Exercice).*

Ensuite $\mathcal{L}\left(\sum_k a_k x^k\right)$ se calcule par linéarité de l'opérateur $\mathcal{L}(.)$.

Pour aller plus loin. Une autre option est de remarquer que l'expression de $F(p)$ est très semblable à la *fonction Gamma d'Euler* qui prolonge la factorielle à l'ensemble des nombres réels. Pour y réel, $y > -1$, cette fonction s'écrit : $\Gamma(y) = \int_0^{+\infty} x^{(y-1)} \exp(-x)\, dx$.

Et pour tout entier $k > 0$: $\Gamma(k) = (k-1)! = 1 \times 2... \times (k-1)$.

On a : $F(p) = \mathcal{L}(x^k)(p) = \int_0^{+\infty} x^k \exp(-px)\, dx$.

On effectue le changement de variable : $u = px$. On obtient : $F(p) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{p^k} u^k \exp(-u) \frac{1}{p} du$.

Donc pour k entier, $k \geq 1$,

$$\mathcal{L}(x^k)(p) = \frac{k!}{p^{k+1}} \text{ pour } p > 0. \tag{3.9}$$

La transformée d'un polynôme s'obtient ensuite directement par linéarité de l'opérateur $\mathcal{L}(.)$.

On a :

$$\mathcal{L}(\sum_{k=0}^{m} a_k x^k)(p) = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{m} a_k \frac{k!}{p^k} \text{ pour } p > 0. \tag{3.10}$$

Bien d'autres images types sont utiles en pratique (quoi que leur nombre n'est pas très important). Nous renvoyons le lecteur aux tables disponibles sur de (bons) sites web ou bien aux tables communiquées en complément de ce cours.

Distribution-mesure de Dirac $\delta(x)$. Soit $\delta(x)$ désigne la *distribution (ou mesure)* de Dirac. Nous renvoyons le lecteur au document de cours « Dirac ».

Un calcul de $\mathcal{L}(\delta(x))(p)$ donne :

$$\mathcal{L}(\delta(x))(p) = 1 \;\; \forall p \in R \tag{3.11}$$

4 Résolution d'EDO linéaires par la transformée de Laplace

Nous avons vu durant un précédent cours que les EDO linéaires du 1er ordre et 2ième ordre à coefficients constants se résolvent facilement à l'aide d'une méthodologie claire et systématique. Par contre ces techniques ne s'appliquent pas aux EDO d'ordre plus élevée (même lorsque celles-ci sont linéaires). Nous présentons dans ce paragraphe tout l'intérêt de la transformée de Laplace : résoudre une EDO linéaire d'ordre n.

4.1 Exemple : une EDO linéaire d'ordre 1 très simple

Considérons l'EDO linéaire d'ordre 1 non homogène i.e. le cas (quasiment) le plus simple qui soit. On cherche à résoudra le problème aux valeurs initiales suivant :

$$\begin{cases} y^{'}(t) + a_0 y(t) = 1 \\ \text{Avec la C.I. } y(0) = y_0. \end{cases} \tag{4.1}$$

Nous savons intégrer directement cette équation différentielle « à la main ». On obtient alors l'expression de son (unique) solution :

$$y(t) = 1 + (y_0 - 1)\exp\left(-a_0 t\right) \quad \forall t \geq 0 \tag{4.2}$$

Résolvons à présent cette même équation différentielle mais par la transformée de Laplace. On note : $Y(p) = \mathcal{L}\left(y(t)\right)(p)$.

Pour cela, on considère *l'image par $\mathcal{L}$ de l'équation différentielle.* On obtient :

$$\mathcal{L}\left(y^{'}(t) + a_0 y(t) - 1\right)(p) = 0 \quad \text{pour tout } p \text{ tel que les transformées soient bien définies.}$$

Par ailleurs on a : $\mathcal{L}\left(y^{'}(t)\right) = p\mathcal{L}\left(y(t)\right) - y(0)$. Aussi l'opérateur $\mathcal{L}(.)$ est linéaire.

D'où pour tout p tel que les transformées sont bien définies, on a :

$$(p + a_0)Y(p) - y_0 = \mathcal{L}(1)(p) \tag{4.3}$$

On montre immédiatement que : $\mathcal{L}(1) = \frac{1}{p}$ pour $p > 0$.

On obtient alors :

$$Y(p) = \frac{1 + y_0 p}{p(p + a_0)} \tag{4.4}$$

$Y(p)$ est égal à une fraction rationnelle que l'on décompose en éléments simples :

$$Y(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{(p + a_0)} + y_0\frac{1}{(p + a_0)} = \frac{1}{p} + (y_0 - 1)\frac{1}{(p + a_0)} \tag{4.5}$$

On a vu que : $\mathcal{L}\left(H(t)\right)(p) = \frac{1}{p}$ et $\mathcal{L}\left(\exp(\alpha t)\right)(p) = \frac{1}{(p-\alpha)}$. On a donc :

$$Y(p) = \mathcal{L}\left(H(t)\right)(p) + (y_0 - 1)\mathcal{L}\left(\exp(-a_0 t)\right)(p) \tag{4.6}$$

Soit :

$$\mathcal{L}\left(y(t) - H(t) - (y_0 - 1)\exp(-a_0 t)\right)(p) = 0 \tag{4.7}$$

On *repasse à l'espace original en appliquant l'opérateur* $\mathcal{L}^{-1}$. On obtient pour $t \geq 0$,

$$y(t) - 1 - (y_0 - 1)\exp(-a_0 t) = 0 \tag{4.8}$$

Soit (bien sûr) la solution obtenue précédemment.

4.2 Cas général : EDO linéaire d'ordre n

La démarche illustrée dans le cas très simple précédent se généralise directement aux EDO linéaires d'ordre n quelconque. En pratique les EDO rencontrées sont souvent d'ordre 2, 3 ou 4 maximum.

Considérons l'EDO linéaire d'ordre n non homogène suivante :

$$\begin{cases} y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + ... + a_0 y(t) & = f(t) \\ \text{Avec les C.I. } \{y^{(n-1)}(0), ..., y(0)\}\text{donnés.} \end{cases} \tag{4.9}$$

Rappelons que l'on a :

$$\mathcal{L}\left(y^{(k)}(t)\right) = p\mathcal{L}\left(y^{(k-1)}(t)\right) - y^{(k-1)}(0) = ... = p^k \mathcal{L}(y(t)) - \sum_{i=0}^{k-1} p^i y^{(k-1-i)}(0) \tag{4.10}$$

On note : $Y(p) = \mathcal{L}(y(t))(p)$ et $F(p) = \mathcal{L}(f(t))(p)$.

On suppose pour des raisons de simplicité et clarté de calculs que :

$$y^{(n-1)}(0) = ... = y(0) = 0 \tag{4.11}$$

Etape 1 On considère la *transformée de l'équation différentielle ; soit :*

$$\mathcal{L}\left(y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + ... + a_0 y(t) - f(t)\right)(p) = 0 \quad \forall p \tag{4.12}$$

Par linéarité de l'opérateur $\mathcal{L}(.)$, on obtient :

$$\left(p^n + a_{n-1}p^{n-1} ... + a_0\right) Y(p) = F(p) \tag{4.13}$$

Soit :

$$Y(p) = \frac{F(p)}{(p^n + a_{n-1}p^{n-1} ... + a_0)} \tag{4.14}$$

La transformée $Y(p)$ de la solution recherchée $y(t)$ est donc obtenue sous la forme d'une f*raction rationnelle.*

Etape 2 On *décompose* cette fraction rationnelle en *éléments simples* de la forme : $\frac{1}{(p-z)^m}$, $m \geq 1$, et $\frac{(a\,p+b)}{(p^2 - c_1 p + c_0)}$.

Etape 3 On identifie chaque élément simple commé étant l'image d'une fonction connue. Pour cela on utilise une *table d'images usuelles* par transformée de Laplace.

On obtient finalement la solution de l'EDO par inversion de chacun des éléments simples :

$$y(t) = \sum \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(p-z)^m}\right)(t) + \sum \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{(a\,p+b)}{(p^2-c_1p+c_0)}\right)(t)$$