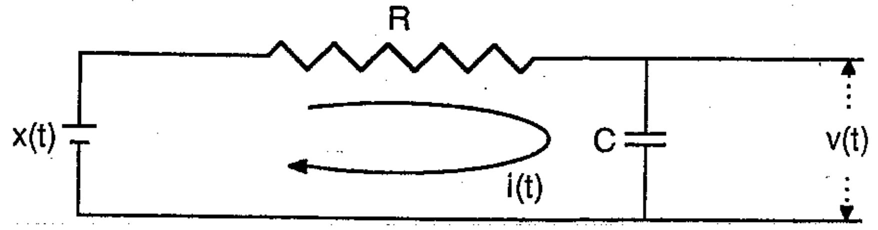
Filtrage analogique

Un exemple physique de filtre analogique : le circuit RC



L'entrée est la tension x(t)*, la sortie est* v(t) *tension aux bornes du condensateur.*
La loi d'Ohm fournit l'équation :

$$R\,i(t) + v(t) = x(t)$$

Si Q(t) *est la charge à l'instant* t *du condensateur de capacité* C*, on a les relations :*

$$v(t) = \frac{Q(t)}{C} \quad \text{et} \quad i(t) = \frac{dQ(t)}{dt}$$

On obtient l'équation différentielle :

$$\boxed{RC\,v'(t) + v(t) = x(t)}$$

(E.D.O. lin 1er ordre avec 2nd membre

Calcul sol° de l'eq diff elle

En posant $v(t) = w(t)\,e^{-\frac{t}{RC}}$

on a $v'(t) = \left(w'(t) - \frac{1}{RC}w(t)\right)e^{-\frac{t}{RC}}$

et l'équation devient : $RC\,w'(t)e^{-\frac{t}{RC}} - w(t)e^{-\frac{t}{RC}} + w(t)e^{-\frac{t}{RC}} = x(t)$

soit : $w'(t) = \frac{1}{RC}e^{\frac{t}{RC}}\,x(t)$

Par intégration : $w(t) = \frac{1}{RC}\int_{-\infty}^{t} e^{\frac{\tau}{RC}}\,x(\tau)\,d\tau + K$

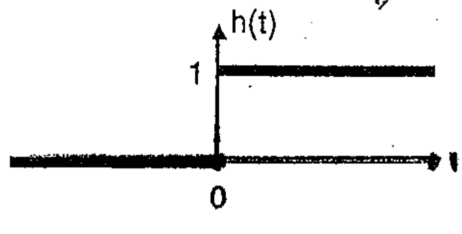
qui, reporté dans v(t) *donne :* $v(t) = \frac{1}{RC}\int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{t-\tau}{RC}}\,x(\tau)\,d\tau + K\,e^{-\frac{t}{RC}}$

$x(t) \equiv 0$ *doit entrainer* $v(t) \equiv 0 \Rightarrow K = 0$ *. Il reste :*

$$\boxed{v(t) = \frac{1}{RC}\int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{t-\tau}{RC}}\,x(\tau)\,d\tau}$$

L'expression précédente ressemble à un produit de convolution. Posons :

$$\boxed{\theta(t) = \frac{1}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}\,h(t)} \quad \text{avec } h(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t \le 0 \\ 1 \text{ si } t > 0 \end{cases}$$



La fonction h(t) *est appelée "Echelon de Heaviside".*
On a alors :

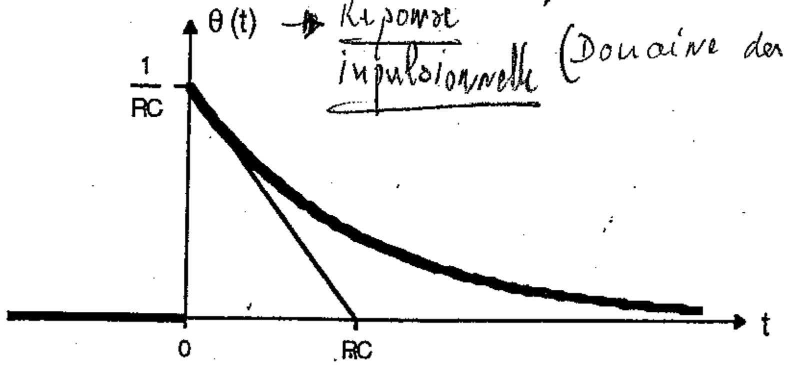
sortie entrée

$$v(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(t-\tau)\, x(\tau)\, d\tau \qquad \textit{c'est à dire} \qquad \boxed{v = \theta * x}$$

La sortie v(t) *est donc le résultat du produit de convolution de l'entrée* x(t) *par la fonction* θ(t) *qui caractérise le circuit et qui dépend de la "constante de temps"* RC.

Terminologie

Réponse impulsionnelle (Domaine des tps)



En passant dans le domaine des fréquences par la Transformation de Fourier, on a :

$$\boxed{\hat{v}(f) = \hat{\theta}(f)\,.\,\hat{x}(f)} \quad \textit{ou} \quad \boxed{V(f) = \Theta(f)\,.\,X(f)} \quad \textit{ou encore} \quad \boxed{V = \Theta \times X}$$

Cette expression montre que pour chaque fréquence f, *le composant de l'entrée* X(f) *est multiplié par* Θ(f) *pour donner le composant de la sortie* V(f) *: on dit que l'entrée est "filtrée".*
La fonction Θ(f) *est donnée par :*

Fct de Transfert

$$\Theta(f) = \frac{1}{RC}\int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{RC}} . e^{-2i\pi f t}\, dt$$

$$= \frac{1}{RC}\int_0^{\infty} e^{-\left(\frac{1}{RC} + 2i\pi f\right)t}\, dt$$

$$= \frac{1}{RC}\left[-\frac{1}{\frac{1}{RC} + 2i\pi f}\, e^{-\left(\frac{1}{RC} + 2i\pi f\right)t}\right]_0^{\infty}$$

$$\boxed{\Theta(f) = \frac{1}{1 + 2i\pi f RC}}$$

Ce résultat aurait pu être obtenu directement en prenant la Transformée de Fourier de l'équation différentielle :

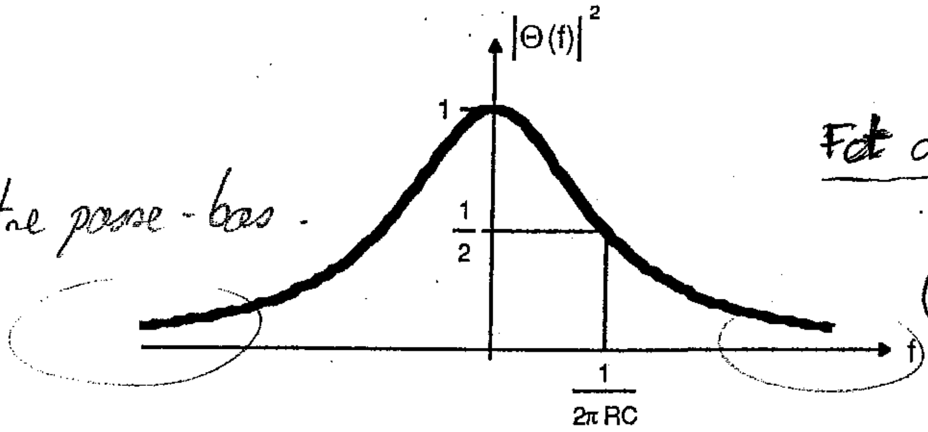
$$RC\,\widehat{v'}(f) + \hat{v}(f) = \hat{x}(f)$$

$$\widehat{v'}(f) = 2i\pi f\, \hat{v}(f) \;\Rightarrow\; (RC\, 2i\pi f + 1)\, V(f) = X(f)$$

$$V(f) = \frac{1}{1 + 2i\pi f RC}\, X(f)$$

$\Theta(f)$ est une fonction complexe dont le module est représenté ici.

Filtre passe-bas.



Fct de Transfert

(Domaine des fréquences)

Terminologie

Dans le domaine des temps, θ est appelée la Réponse Impulsionnelle du filtre.

En effet, δ est l'élément neutre du produit de convolution, si l'entrée est δ, la sortie est θ :

$$\theta * \delta = \theta$$

=> *Dans le domaine des fréquences, Θ est appelée la Fonction de Transfert du filtre.*

L'allure de $|\Theta(f)|^2$ montre que plus la fréquence est élevée, plus les composants de l'entrée sont atténués : le filtre RC est un filtre Passe-Bas. Un filtrage des hautes fréquences s'appelle un Lissage.