La distribution (mesure) de Dirac

par J. Monnier, professeur INSA Toulouse.

Jerome.Monnier@insa-toulouse.fr

Janvier 2019

Résumé

Introduction à l'objet mathématique *« Dirac »*.
Public visé : étudiants, professionnels en formation continue, cycle préparatoire de notre école d'ingénieur INSA.

Table des matières

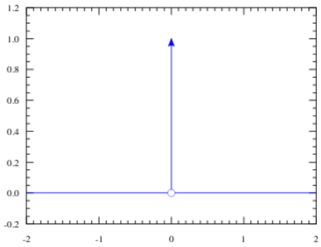

FIGURE 0.1 – Représentation graphique de la distribution de Dirac $\delta(x)$.

Paul Dirac (1902-1984) est un mathématicien et physicien britannique. Il est l'un des pères de la mécanique quantique ; il a prévu l'existence de l'antimatière. Il est co-lauréat avec E. Schrödinger du prix Nobel de physique de 1933 « pour la découverte de formes nouvelles et utiles de la théorie atomique». Il a introduit la *distribution* δ désormais dite distribution de Dirac.

1 Caractéristiques & concepts préliminaires

1.1 Caractéristiques

Le Dirac noté $\delta(x)$ est une « pseudo-fonction » qui possède les caractéristiques suivantes :

$$\delta(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{1.1}$$

$$\int_{\mathbb{R}} \delta(x) dx = 1 \tag{1.2}$$

Le graphe de $\delta(x)$ peut être donc être représenté par l'axe des abscisses en entier et le demi-axe des ordonnées positives.

Avec « le Dirac » $\delta(x)$ on souhaite représenter une impulsion, un évènement ponctuel (infiniment courte), « d'énergie » finie non nulle.

Illustrons cela avec l'exemple suivant. Pour représenter, modéliser la trajectoire et la vitesse d'une balle de tennis au service, nous pouvons représenter l'impulsion donnée en $t = 0$ par la raquette par δ. (Ce terme représentant la condition initiale dans l'équation classique de mécanique newtonienne qui est ici une équation différentielle ordinaire d'ordre 2).

On remarque que les caractéristiques de $\delta(x)$ ne sont pas celles d'une fonction mathématique telles que définies usuellement. Il s'agit en fait d'un objet mathématique plus général que l'on appelle « distribution » (il s'agit plus même précisément d'une « mesure »). On parle de la *mesure ou de la distribution de Dirac.*

1.2 Définition de $\delta(x)$ par passage à la limite

Formellement le Dirac peut être défini à partir d'outils classiques d'analyse mathématique par passage à la limite.

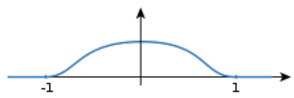

FIGURE 1.1 – $\phi(x)$ fonction infiniment régulière (gaussienne « normalisée ») à support compact : $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Soit $f_n(x)$ la suite de fonctions définie comme suit :

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{pour } x \in [-\frac{1}{2n}, +\frac{1}{2n}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{1.3}$$

On a bien : $f_n(x) \to_{n\to\infty} \delta(x)$ pour tout x et $\int_{\mathbb{R}} f_n(x)dx = 1$ pour tout n.

Le Dirac peut également être perçu comme étant la limite lorsque a tend vers 0 de la gaussienne centrée suivante : $\frac{1}{a}\mathrm{e}^{-(x/a)^2}$.

1.3 Introduction (très brève) aux distributions et leurs dérivées

On introduit ici extrêmement brièvement le concept mathématique de « distribution » et de leur dérivée ; concepts dont on a besoin par la suite.

Une *distribution* est un objet mathématique qui généralise la notion de fonction. La théorie des distributions étend la notion de dérivée à toutes les fonctions localement intégrables et pas nécessairement dérivables au sens usuel (...).

Les distributions sont utiles en physique (au sens large) et en ingénierie où beaucoup de phénomènes sont en fait *discontinus*. Leur représentation mathématique (modélisation) conduit alors à des équations différentielles (Equations aux Dérivées Partielles notamment) dont les solutions sont des distributions et non des fonctions usuelles.

1.3.1 Fonctions C^∞ à support compact

Pour évaluer « l'action » d'une distribution nous nous appuyons sur des fonctions *suffisamment régulières et à support compact*.

On note par $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ ou encore $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions $\phi(x)$ de classe $C^\infty(\mathbb{R})$ qui s'annulent, ainsi que toutes leurs dérivées, en dehors d'un fermé borné.

De telles fonctions *suffisamment régulières* (C^∞ pour être tranquille) *à support compact* sont au cœur de la théorie des distributions.

Un exemple type de fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ est une gaussienne prolongée par 0. Par exemple la fonction suivante :

$$\phi(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{-1}{1-x^2}\right) & \text{pour } |x| < 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{1.4}$$

1.3.2 Notion de dérivée au sens des distributions

Soit $< .,. >$ désigne le crochet de dualité pour les distributions, une sorte de produit scalaire.
Si une distribution $T(x)$ est *régulière i.e. une fonction au sens usuel* alors on a :

$$< T(x), \phi(x) >= \int_{\mathbb{R}} T(x)\, \phi(x)\, dx \quad \forall \phi \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}) \tag{1.5}$$

C'est donc des valeurs de ce crochet de dualité, une intégration du produit par la « fonction test » ϕ (ϕ régulière à support compact), que nous mesurons l' »action » d'une distribution T.

Définissons *la dérivée au sens des distributions.*
Pour une fonction $f(x)$ de classe $C^1(\mathbb{R})$, on a par intégration par parties :

$$\int_{\mathbb{R}} f'(x)\phi(x)\, dx \; = \; - \int_{\mathbb{R}} f(x)\phi'(x)\, dx \quad \forall \phi \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}) \tag{1.6}$$

En effet, la *fonction test* ϕ est par construction nulle aux bords (ainsi que toutes ses dérivées) car à support compact (les termes de bords s'annulent donc toujours dans les intégrales considérées).

Pour $f(x)$ fonction usuelle de classe $C^1(\mathbb{R})$ (f définit donc une distribution régulière), sa dérivée $f'(x)$ peut être caractérisée par l'égalité (1.6).

Pour une *distribution* $T(x)$ quelconque (et donc pas une fonction dérivable au sens usuel), on étend la propriété caractérisant la dérivée comme suit :

$$\boxed{< T'(x), \phi(x) >= \; - < T(x), \phi'(x) > \quad \forall \phi \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}) \qquad (1.7)}$$

« T' » est défini comme étant l'objet mathématique (une distribution, non nécessairement une fonction) vérifiant (1.7).

On a par conséquent les propriétés suivantes.

— Soit $f(x)$ est une fonction usuelle de classe $C^0(\mathbb{R})$ (i.e. une distribution régulière), non dérivable au sens usuel. On a alors :

$$< f'(x), \phi(x) >= \; - < f(x), \phi'(x) >= - \int_{\mathbb{R}} f(x)\phi'(x)\, dx \quad \forall \phi \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}) \tag{1.8}$$

A noter que pour définir la dérivée première au sens des distributions (dérivée également dite au *sens faible*), ϕ appartenant à $\mathcal{C}_c^1(\mathbb{R})$ suffit : pas besoin de ϕ dans $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$.

— Pour $f(x)$ fonction de classe $C^1(\mathbb{R})$, sa dérivée $f'(x)$ au sens usuel (qui est une fonction de classe $C^0(\mathbb{R})$ est égale à sa dérivée au sens des distributions.

Les distributions (resp. la notion de dérivée au sens des distributions) est une extension de la notion de fonction (resp. de la notion de dérivée au sens usuel).

L'étude des distributions est une thématique des mathématiques en soi, non triviale, et qui ne fait pas l'objet du présent cours. Nous avons besoin ici de concepts introductifs uniquement et ce pour pouvoir manipuler la distribution de Dirac $\delta(x)$ et la dérivée d'un saut.

2 Propriétés fondamentales de δ

3 Propriété fondamentale

La *distribution de Dirac* δ est caractérisée par la propriété suivante :

$$\boxed{\int_{\mathbb{R}} \phi(x)\ \delta(x)\, dx \ =\ \phi(0) \quad \forall \phi \in C_c^0(\mathbb{R})} \tag{3.1}$$

3.1 Fonction échelon (Heaviside) et Dirac

Soit la fonction échelon (aussi appelée fonction de Heaviside) définie par :

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \tag{3.2}$$

Cette fonction élémentaire est omniprésente en ingénierie, notamment en signal (au sens large). Aussi elle représente la discontinuité de 1ère espèce (saut d'amplitude borné) le plus simple qui soit.

$H(x)$ est C^∞ par morceaux (c'est une constante sur chaque morceau) mais non continue sur $\mathbb{R}$ tout entier car discontinue en $x = 0$.

$H(x)$ n'est donc bien sûr pas dérivable en $x = 0$, au sens usuel de la dérivée...

Cependant on a le résultat fondamental suivant *: la distribution de Dirac δ est égale à la dérivée au sens des distributions de la fonction échelon $H(x)$*. Soit :

$$\boxed{H'(x) = \delta(x) \quad \forall x} \tag{3.3}$$

C'est à dire que *la dérivée d'un saut (au sens des distributions) est tout simplement le Dirac.*

Montrons ce résultat. Au sens des distributions, on a :

$$< H'(x), \phi(x) >= - < H(x), \phi'(x) >= - \int_{\mathbb{R}} H(x)\phi'(x)\, dx \quad \forall \phi \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}) \tag{3.4}$$

d'après (1.7) et (1.5) ($H(x)$ est une fonction donc une distribution régulière).

Soit : $\forall \phi \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R})$,

$$< H'(x), \phi(x) >= - \int_0^{+\infty} \phi'(x)\, dx \ = -[\phi(x)]_0^{+\infty} \ = +\phi(0) \ = \int_{\mathbb{R}} \delta(x)\, \phi(x)\ dx \tag{3.5}$$

D'où le résultat $H' = \delta$.

3.2 Elément neutre de la convolution

Rappelons la définition du produit de convolution. Soient (f, g) fonctions définies dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), f et g fonctions intégrales sur $\mathbb{R}$, on a :

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x - y)g(y)\, dx \tag{3.6}$$

On montre que *le Dirac $\delta(x)$ est l'élément neutre de la convolution :*

$$\boxed{\phi * \delta = \phi \qquad (3.7)}$$

Cette propriété est centrale en traitement du signal.
Exercice : montrer cette propriété. (Immédiat).

3.3 Transformée de Fourier $\mathcal{F}(\delta)$

La transformée de Fourier de δ est la fonction constante 1 :

$$\boxed{\hat{\delta}(\xi) \equiv \mathcal{F}(\delta)(\xi) = 1 \qquad \forall \xi \qquad (3.8)}$$

En effet, formellement par définition on a (cf cours « Transformée de Fourier) :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \hat{\delta}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi}\, \delta(x)\, dx = e^{-\mathrm{i}0\cdot\xi} = 1 \tag{3.9}$$

3.4 Transformée de Laplace $\mathcal{L}(\delta)$

La transformée de Laplace (cf cours « Transformée de Laplace ») de δ est la fonction constante 1 :

$$\boxed{\mathcal{L}(\delta(x))(p) = 1 \qquad \forall p \qquad (3.10)}$$

Démonstration. Soit $g_n(x)$ une suite de fonctions semblable à celle définie par (1.3) mais « causale » (cf cours « Transformées de Laplace ») :

$$g_n(x) = \begin{cases} n & \text{pour } x \in [0, +\frac{1}{n}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{3.11}$$

On a (à nouveau) bien : $g_n(x) \to_{n\to\infty} \delta(x)$ pour tout x et $\int_{\mathbb{R}} g_n(x)dx = 1$ pour tout n.
Sa transformée de Laplace s'écrit :

$$\mathcal{L}(g_n(x))(p) = \int_0^{+\infty} g_n(x)\, \mathrm{e}^{-px}\, dx = n \int_0^{1/n} \mathrm{e}^{-px}\, dx = \frac{n}{p}(1 - \exp(-\frac{p}{n})) \tag{3.12}$$

Un passage à la limite en n conduit à une indétermination. On effectue alors le changement de variable $y = \frac{p}{n}$. On obtient :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathcal{L}(g_n(x))(p) = \lim_{y\to 0} \left(\frac{1 - \exp(-y)}{y} \right)$$

Or : $\left(\frac{1-\exp(-y)}{y}\right) \sim_0 (1 - y)$. D'où : $\lim_{n\to+\infty} \mathcal{L}(g_n(x))(p) = 1$.

On en déduit alors le résultat $\mathcal{L}(\delta)(p) = 1$ (en supposant que : $\lim_n \mathcal{L}(g_n(x))(p) = \mathcal{L}(\lim_n g_n(x))(p) = \mathcal{L}(\delta(x))(p)$).

A noter que formellement on a bien : $\lim_n \mathcal{L}(g_n(x))(p) = \mathcal{L}(\lim_n g_n(x))(p) = \mathcal{L}(\delta(x))(p)$.

Par contre montrer rigoureusement ces deux égalités n'est pas trivial et requiert des outils mathématiques hors du champ de ce cours.

3.5 Dérivée

NB. Propriété a-priori non nécéssaire dans notre contexte.
Le calcul de la dérivée du Dirac (au sens des distributions bien sûr) donne :

$$\forall \phi \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}), \quad \langle \delta', \phi \rangle = -\phi'(0) \tag{3.13}$$

Tous ces résultats restent valables dans $\mathbb{R}^n$.

4 Le peigne de Dirac

4.1 Dirac translaté

L'impulsion « d'énergie » finie à représenter mathématiquement n'est pas nécessairement en $x = 0$. On définit alors simplement par translation le Dirac translaté de a, $a \in \mathbb{R}$, noté δ_a par :

$$\delta_a(x) = \delta(x - a) \tag{4.1}$$

On a alors :

$$\int_{\mathbb{R}} \phi(x)\ \delta_a(x)\, dx \ = \ \phi(a) \qquad \forall \phi \in C_c^0(\mathbb{R}) \tag{4.2}$$

4.2 Peigne de Dirac

4.2.1 Définition

Le point de départ de la numérisation, échantillonnage, est la discrétisation d'un signal continue $F(x)$. Mathématiquement cette étape est effectuée à l'aide du *peigne de Dirac*. Il s'agit de la distribution notée $Ш_{\Delta x}(x)$ et définie par :

$$\boxed{Ш_{\Delta x}(x) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \delta_{k,\Delta x}(x) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \delta(x - k\Delta x) \qquad (4.3)}$$

La caractérisation fondamentale du peigne de Dirac s'écrit :

$$\int_{\mathbb{R}} \phi(x)\, Ш_\tau(x)\, dx \ = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \phi(k\tau) \tag{4.4}$$

On remarque que *le calcul approché d'une intégrale* par la méthode des rectangles est équivalent *au calcul de l'intégrale de la fonction multipliée par un peigne de Dirac.*

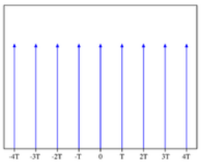

FIGURE 4.1 – Représentation graphique du peigne de Dirac $\text{Ш}_\tau(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_{k,\tau}(t)$.

4.2.2 Propriétés

Pour aller plus loin.

On note $\tau = \Delta x$ la période du peigne (qui est une distribution et non une fonction...) et $\omega = \frac{2\pi}{\tau}$.

Le peigne peut être développé en série de Fourier (après extension du concept aux distributions et plus aux seules fonctions C^1 par morceaux) ; on obtient :

$$\text{Ш}_\tau(x) = \frac{1}{\tau}\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \exp(i\omega k x) \tag{4.5}$$

Transformée de Fourier du peigne de Dirac. Par linéarité de la transformée de Fourier on a :

$$\widehat{\text{Ш}_{\Delta x}}(\xi) = \mathcal{F}\left(\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \delta_{k,\Delta x}(x)\right) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \mathcal{F}\left(\delta_{k,\Delta x}(x)\right) \tag{4.6}$$

Soit :

$$\widehat{\text{Ш}_{\Delta x}}(\xi) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \int_{\mathbb{R}} \delta_{k,\Delta x}(x) \exp\left(-ix\xi\right)\, dx = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \exp\left(+i\, k\, \delta x\, \xi\right) \tag{4.7}$$

On obtient finalement :

$$\widehat{\text{Ш}_\tau}(\xi) = \frac{1}{\tau}\text{Ш}_{1/\tau}(x) \tag{4.8}$$

La transformée de Fourier du peigne de Dirac est un (autre) peigne de Dirac.