SÉRIES DE FOURIER

par J. Monnier, professeur INSA Toulouse.

Jerome.Monnier@insa-toulouse.fr

Janvier 2020

Résumé. Introduction aux séries de Fourier, un outil mathématique de base pour l'ingénieur.
Public visé : étudiants, professionnels en formation continue, cycle préparatoire de notre école d'ingénieur INSA.

Table des matières

FIGURE 1.1. J.-B. Joseph Fourier (1768- 1830), mathématicien et physicien français. J. Fourier est connu pour avoir déterminé, par le calcul, la diffusion de la chaleur en utilisant la décomposition d'une fonction quelconque en une série trigonométrique convergente i.e. les séries de Fourier. La méthode de calcul permettant de passer, de façon réversible, d'une fonction à la série trigonométrique correspondante est la transformation de Fourier. Cette méthode très féconde est devenue incontournable en théorie du signal, imagerie numérique, compression de données, dans l'exploitation des systèmes 3G, 4G. Extrait de Wikipedia.

1. Introduction [3]

Les séries de Fourier constituent un outil fondamental pour étudier les phénomènes, *fonctions périodiques.* En ingénierie elles sont utiles dans la décomposition de signaux périodiques tels que des courants électriques, des ondes cérébrales, des ondes sonores, des images etc.

Considérons un signal basique : la vibration d'un diapason. Quand le diapason vibre, il fait vibrer les molécules d'air. En un point x et au temps t, la variation pression de l'air p produite par le diapason (p caractérise l'onde sonore) est une onde sinusoidale pure de pulsation $\omega = 2\pi v/\lambda$ et de vecteur d'onde $k = 2\pi/\lambda$; v la célérité de l'onde et λ sa longueur d'onde. On a alors : $p(x, t) = Acos(kx - \omega t)$.

Si l'on émet simultanément plusieurs sons de fréquences différentes, la pression résultante n'est pas une simple fonction sinusoïdale mais une somme de plusieurs fonctions sinusoïdales. De même, si l'on joue une note de piano, on n'obtient pas une onde sonore de fréquence unique mais un son fondamental accompagné d'autres sons (les harmoniques) de fréquences égales à n fois celle du son fondamental, n nombre entier. Si $sin(\omega t)$ et $cos(\omega t)$ correspondent à la fréquence fondamentale, $sin(n\omega t)$ et $cos(n\omega t)$ correspondent aux harmoniques.

La combinaison du fondamental et des harmoniques est alors une fonction potentiellement compliquée mais périodique de période celle du fondamental.

En fait un signal de “forme” quelconque mais périodique de fréquence f peut être obtenu en ajoutant : une sinusoïde de fréquence f (appelée fondamentale) et des sinusoïdes dont les fréquences sont des multiples entiers de f (ces sinusoides ayant des amplitudes et des phases appropriées). En général, il est nécessaire pour cela d'écrire toutes les harmoniques c'est-à-dire une *somme infinie* de termes i.e. une série. Cette série est appelée série de Fourier.

Etudier une fonction *périodique* F à l'aide des séries de Fourier consiste généralement à : a) décomposer F en ses différents harmoniques i.e. déterminer les coefficients de sa série de Fourier ; b) retrouver F à partir de ses coefficients de Fourier.

Cette “analyse de Fourier” peut être considérée comme une façon de décrire les fonctions périodiques.

1. Introduction largement inspirée de la page Wikipedia et aussi d'un exemple présenté dans le cours de N. Pottier de l'université Paris 7.

2. Elements de base disponibles dans tout bon cours ou encore sur la page ad-hoc de Wikipedia.

3. Introduction largement inspirée de la page Wikipedia et aussi d'un exemple présenté dans le cours de N. Pottier de l'université Paris 7.

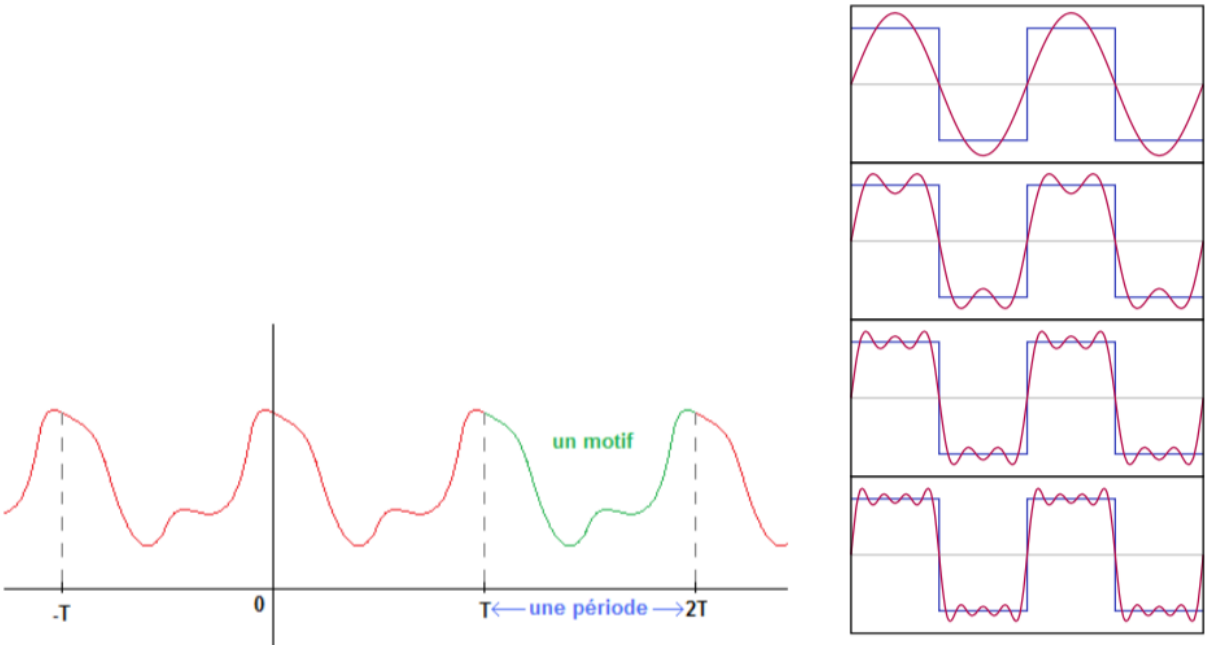

Figure 1.2. (G) Exemple de fonction continue, périodique, décomposable en série de Fourier.
(D) Fonction créneau (constante par morceaux avec discontinuités) ; décomposition partielle (4 premiers modes) du signal périodique.
En bleu la fonction ; en rouge sa décomposition avec 1, 2, 3 et 4 modes (uniquement). Images extraites du web.

Les séries de Fourier ont été introduites par Joseph Fourier en 1822. Ces séries ont ensuite constitué une des bases de plusieurs branches fondamentales des mathématiques : analyse harmonique, théorie du signal, ondelettes.

2. Les séries et premier exemple de série de Fourier

2.1. **Les séries : (très) bref rappel**[4]**.**

2.1.1. *Définition.* En mathématiques, la notion de série généralise la notion de somme *finie*. Étant donnée une *suite* de terme général u_n, étudier la *série de terme général* u_n consiste à étudier la suite obtenue en prenant la somme des premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in N}$. Autrement dit, on étudie le comportement de la suite de terme général S_N défini par :

$$S_N = u_0 + u_1 + ... + u_n = \sum_{k=0}^{N} u_k \tag{2.1}$$

L'étude d'une série commence par étudier si sa limite (en N) existe ou non. Si sa limite existe, la série est dite convergente, sinon elle est dite divergente. Si S_N est convergente, on note : $S = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} u_k \equiv \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$.

Plusieurs techniques permettent de déterminer la nature convergence ou non d'une série sans effectuer son calcul explicite.

Pour les séries à termes positifs, il existe des techniques d'analyse basées sur un principe de comparaison ; comparaison notamment aux séries de références de Riemann. Les outils d'analyse de la convergence ou non des « sommes discrètes » i.e. des séries sont semblables à ceux employés dans le cas des « sommes continues » i.e. les intégrales généralisées.

2.1.2. *Un exemple de calcul explicite.* Il est rare de pouvoir calculer explicitement l'expression des sommes partielles qui plus est des sommes infinies. Les *séries géométriques* font partie des exceptions : elles font partie des quelques séries usuelles que nous savons calculer explicitement.

Une série est dite géométrique si chaque terme est obtenu en multipliant le terme précédent par un nombre constant appelé la raison. La série de terme général z_k s'écrit : $S_N = \sum_{k=0}^{N} z^k$.

On montre facilement que : $S_N = \frac{1-z^{N+1}}{1-z}$ si $z \neq 1$ (et $S_N = (N+1)$ sinon).

S_N est donc convergente si et seulement si le nombre (réel ou complexe) z vérifie : $|z| < 1$. Auquel cas on a : $S = \frac{1}{1-z}$ (en effet on a dans ce cas : $|z^k| \to_{+\infty} 0$).

Exemples de séries géométriques : $\sum_{n\geq 0} \left(\frac{1}{3}\right)^n$ ou encore $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(1+\mathrm{i})^n}$.

Toutes deux sont des séries convergentes.

2.1.3. *Les séries de Riemann.* Les séries dites de Riemann sont de la forme :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha} \tag{2.2}$$

où α est un nombre réel quelconque. La série ci-dessus est convergente si et seulement si : $\alpha > 1$.

Le cas limite $\alpha = 1$ définit la *série dite harmonique* :

$$S_N = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{N} \tag{2.3}$$

4. Elements de base disponibles dans tout bon cours ou encore sur la page ad-hoc de Wikipedia.

La série harmonique diverge. En effet on peut montrer que : $\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} = \ln N + \gamma + o(1)$ où γ est la constante d'Euler.

Rappelons que si une série est convergente alors nécessairement son terme général u_n converge vers 0 : $u_n \to_\infty 0$. La réciproque est fausse ! Cf par exemple la série harmonique ci-dessus.

Ces séries de Riemann peuvent également être définies pour α complexe ; elles sont alors convergentes si et seulement si : $\Re e(\alpha) > 1$.

Rappelons que les outils d'analyse de la convergence ou non des sommes, séries « discrètes » (i.e. les séries considérées ici) sont semblables à ceux employés dans le cas des « sommes continues » i.e. les intégrales généralisées. Cf par exemple les intégrales de Riemann et le théorème de comparaison pour les intégrandes positives.

Enfin notons que la notion de série peut être étendue à des sommes infinies dont les termes u_n ne sont pas nécessairement des nombres mais des vecteurs, fonctions ou encore des matrices.

2.2. **Les séries trigonométriques.** Une série trigonométrique est une *série* particulière de polynômes trigonométriques. La série trigonométrique possède une fréquence fondamentale f et une somme de fonctions trigonométriques de fréquence pf, p nombre entier. Une série trigonométrique peut être de forme réelle ou complexe.

La somme partielle d'ordre N d'une *série trigonométrique complexe* s'écrit :

$$S_N(x) = \sum_{k=-N}^{N} c_k \exp\left(\mathrm{i}k\frac{2\pi}{T}x\right) \tag{2.4}$$

Rappelons l'expression de l'exponentielle complexe : $\exp(iz) = \cos(z) + i\sin z$; $i^2 = -1$.

La somme partielle d'ordre N d'une *série trigonométrique réelle* s'écrit :

$$S_N(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{N} a_k \cos\left(k\frac{2\pi}{T}x\right) + \sum_{k=1}^{N} b_k \sin\left(k\frac{2\pi}{T}x\right) \tag{2.5}$$

Les constantes c_k $(k = ... - 1, 0, +1, \ldots)$ ou encore a_0, a_k et b_k $(k = +1, +2 \ldots)$ sont les coefficients de la série trigonométrique.

Notons que les fonctions sinusoïdales $\sin\left(k\frac{2\pi}{T}x\right)$ et $\sin\left(k\frac{2\pi}{T}x\right)$ sont périodiques de période T/k donc a-fortiori T-périodiques.

On posera : $\omega = \frac{2\pi}{T}$. ω est la pulsation si x désigne un temps, un nombre d'onde si x désigne une longueur

Si ces séries convergent, leurs sommes respectives sont des fonctions périodiques $F(x)$ de période T $(f(x) = f(x+T)\ \forall x)$.

Polynômes trigonométriques. Une combinaison linéaire de fonctions sinusoïdales élémentaires sinusoïdales $\cos\left(\frac{2k\pi}{T}x\right)$ et $\sin\left(\frac{2k\pi}{T}x\right)$ porte le nom de polynôme trigonométrique et constitue aussi une fonction

T-périodique. Toute combinaison linéaire de ce type peut se ré-écrire comme combinaison linéaire d'exponentielles complexes $\exp\left(\mathrm{i}k\frac{2\pi}{T}x\right)$.

2.3. **Un exemple bien choisi.** On considère l'exemple particulier de série complexe suivant :

$$S(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{2^{|n|}} \exp(inx) \tag{2.6}$$

Avec les notations précédentes on a : $c_n = \frac{1}{2^{|n|}}$ et $\omega = \frac{2\pi}{T} = 1$.
On pose : $q_+ = \frac{1}{2}\exp(ix)$ et $q_- = \frac{1}{2}\exp(-ix)$. On a alors : $S(x) = q_0 + \sum_{n\geq 1} q_-^n + \sum_{n\geq 1} q_+^n$.
Il s'agit là de séries géométrique de raisons q_+ et q_- qui vérifient : $|q_+| = |q_-| = \frac{1}{2} < 1$.
Ces séries sont donc convergentes avec :

$$S(x) = 1 + \frac{1}{1-\frac{1}{2}\exp(-ix)} + \frac{1}{1-\frac{1}{2}\exp(ix)} \tag{2.7}$$

A partir de l'expression de l'exponentielle complexe, un petit calcul montre que :

$$S(x) = \frac{4(2-\cos x)}{5-4\cos x}$$

On note F cette fonction obtenue : $F(x) = \frac{4(2-\cos x)}{5-4\cos x}$.

On a donc montré que : $\forall x$,

$$S(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{2^{|n|}} \exp(inx) = F(x) \tag{2.8}$$

C'est à dire que la série $S(x)$ définie par (2.6) est convergente ; elle converge vers $F(x)$ pour tout x.
Autrement perçu, la fonction $F(x)$ peut s'écrire sous la forme d'une série trigonométrique (complexe) de coefficients $c_n = \frac{1}{2^{|n|}}$ et avec $\omega = 1$.
Bien entendu, tout comme $S(x)$, $F(x)$ est 2π-périodique.

Une question que l'on se posera par la suite est la suivante.
Etant donnée une fonction $F(x)$, T-périodique, sous quelles conditions peut-on la développer en série trigonométrique (complexe ou réelle) ?
Le théorème de Parseval-Dirichlet qui suit (cf plus loin) fournit des conditions suffisantes pour cela.

3. Expression des coefficients des séries de Fourier

3.1. **Expression des coefficients forme réelle.** Si la fonction $F(x)$ est à valeurs dans $\mathbb{R}$, il est naturel de vouloir la développer en série sous forme réelle et non sous la forme complexe de la série de Fourier (cf prochaine section). Ceci est d'autant plus vrai si F possède une propriété de parité (cf en fin de section). Notons cependant que le développement d'une fonction F à valeurs dans $\mathbb{C}$ est tout a fait possible dans la forme dite réelle ci-dessous.
Soit une fonction $F(x)$ est à valeurs dans $\mathbb{R}$ (ou dans $\mathbb{C}$).
On *suppose* que $F(x)$ satisfait les conditions requises pour qu'elle puisse s'écrire sous la forme d'une série trigonométrique (convergente). On a alors l'égalité :

$$F(x) = S(x) = \lim_{n\to+\infty} S_N(x) \tag{3.1}$$

avec :

$$\boxed{S_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos(\omega n x) + \sum_{n=1}^{N} b_n \sin(\omega n x)} \tag{3.2}$$

où : $\omega = \frac{2\pi}{T}$. ω est la pulsation si x désigne un temps, et le nombre d'onde si x désigne une longueur.

On cherche alors à exprimer les coefficients de Fourier ($a_0, \{a_n, b_n\}_{n\geq 1}$) en fonction de $F(x)$.

Pour alléger les calculs et sans perte de généralité, on considère une fonction $F(x)$ périodique, de période 2π (et non de période T quelconque).

Dans un premier temps on calcule : $\int_{-\pi}^{+\pi} F(x)dx$ i.e. la moyenne de F sur sa période (à un facteur 2π près) .

On a :

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos(nx)dx = 0 \text{ et } \int_{-\pi}^{+\pi} \sin(nx)dx = 0 \ \forall n \geq 1 \tag{3.3}$$

On obtient donc : $\int_{-\pi}^{+\pi} F(x)dx = a_0\pi$. Soit :

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} F(x)dx \tag{3.4}$$

Le coefficient a_0 est donc égal à 2 fois la moyenne de F.

Pour obtenir l'expression des coefficients $\{a_n, b_n\}_{n\geq 1}$, on calcule tout d'abord les intégrales qui suivent.

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos(nx)\ \cos(kx)\, dx = \delta_{nk} = \begin{cases} 0 & \text{pour } n \neq k \\ \pi & \text{pour } n = k \end{cases} \tag{3.5}$$

NB. δ_{nk} est le symbole dit de Kronecker (à ne pas confondre dans le prochain chapitre avec le Dirac noté $\delta(x)$!).

On montre également que :

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos(nx)\ \sin(kx)\, dx = 0 \tag{3.6}$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \sin(nx)\ \sin(kx)\, dx = \begin{cases} 0 & \text{pour } n \neq k \\ \pi & \text{pour } n = k \end{cases} \tag{3.7}$$

Ces résultats sont relativement simples à obtenir par intégration par parties (exercice).

On suppose que $F(x)$ puisse s'écrire sous la forme (3.2) (avec $N \to \infty$) et on calcule : $\int_{-\pi}^{+\pi} F(x)\cos(kx)\, dx$.

On obtient :

(3.8)
$$\int_{-\pi}^{+\pi} F(x)\cos(kx)\,dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{+\pi}\cos(kx)dx+\sum_{n\geq 1} a_n\int_{-\pi}^{+\pi}\cos(kx)\cos(nx)\,dx+\sum_{n\geq 1} b_n\int_{-\pi}^{+\pi}\cos(kx)\sin(nx)\,dx$$

Soit :

(3.9)
$$\int_{-\pi}^{+\pi} F(x)\cos(kx)\,dx = \frac{-a_0}{2k}[\sin(kx)]_{-\pi}^{+\pi} + \pi[a_k.1 + b_k.0] = \pi a_k$$

D'où :

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} F(x)\cos(nx)dx \qquad \forall n \geq 1$$

On montre de même que :

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} F(x)\sin(nx)dx \qquad \forall n \geq 1$$

On a obtenu ci-dessus l'*expression des coefficients de la série de Fourier d'une fonction $F(x)$, 2π-périodique,* sous l'hypothèse que la série est convergente.

Des conditions suffisantes pour que la série soit effectivement convergente sont présentées : cf le théorème de Jordan-Dirichlet qui suit.

Dans le cas d'une *fonction T-périodique* (T de valeur quelconque) , on obtient :

(3.10)
$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T F(x)dx$$

(3.11)
$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T F(x)\cos(\omega nx)dx \qquad \forall n \geq 1$$

(3.12)
$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T F(x)\sin(\omega nx)dx \qquad \forall n \geq 1$$

Rappelons qu'une fonction T-périodique vérifie : $\int_0^T F(x)dx = \int_t^{T+t} F(x)dx$ pour toute « translation » t. Les coefficients de Fourier peuvent alors être calculés sur l'intervalle centré $[-T/2, +T/2]$, ce qui est judicieux si $F(x)$ présente une propriété de parité.

Cas d'une fonction paire ou impaire. Dans le cas où la fonction $F(x)$ est réelle paire, on a :

(3.13)
$$b_n = 0 \text{ pour tout } n \geq 1$$

On obtient alors un développement en cosinus uniquement.

Dans le cas où la fonction $F(x)$ est réelle impaire, on a :

(3.14)
$$a_n = 0 \text{ pour tout } n \geq 1.$$

On obtient alors un développement en sinus uniquement.

Ces propriétés liées à la parité sont immédiates à vérifier à partir des définitions de a_n et b_n (exercice).

Exercice. Calculer le Développement en Série de Fourier (DSF) de la fonction $T-$périodique qui vérifie : $f(x) = |x|$ pour $x \in [-T/2, +T/2]$.
Corrigé disponible en fin de chapitre.

3.2. **Expression des coefficients forme complexe.** Si la fonction $F(x)$ est à valeurs dans $\mathbb{C}$, il est à priori plus naturel et aussi plus facile de manipuler la forme complexe de sa série de Fourier. Que la fonction $F(x)$ soit à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$, l'expression d'une série de Fourier réelle (3.2) peut toujours s'écrire sous sa forme complexe. Pour cela il suffit d'utiliser les expressions suivantes :

$$\cos(nx) = \frac{1}{2}(\exp(inx) + \exp(-inx)) \text{ et } \sin(nx) = \frac{1}{2i}(\exp(inx) - \exp(-inx)) \tag{3.15}$$

où $\exp(iz)$ désigne l'exponentielle complexe.

L'expression de la série de Fourier (3.2) s'écrit alors sous sa forme dite complexe :

$$\boxed{S_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n \exp\left(i\,\omega n x\right)} \tag{3.16}$$

Avec :

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T F(x)\,\exp(-i\,\omega n x)\,dx \qquad \forall n \in \mathbb{Z} \tag{3.17}$$

Notons que les coefficients $\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}^*}$ sont a-priori dans $\mathbb{C}$ même pour une fonction F réelle.

Exercice. Montrer cette équivalence entre les deux expressions de séries de Fourier.

Cas d'une fonction avec propriété de parité, ou étant réelle, imaginaire pure. Dans le cas où la fonction $F(x)$ est paire, on a :

$$c_n = c_{-n}. \tag{3.18}$$

Dans le cas où la fonction $F(x)$ est impaire, on a :

$$c_n = -c_{-n}. \tag{3.19}$$

Aussi dans le cas où :
— F est réelle (i.e. à valeurs dans $\mathbb{R}$), $\overline{c_n} = c_{-n}$.
— F est imaginaire pure, $\overline{c_n} = -c_{-n}$.

3.3. **Passage de la forme complexe à la forme réelle et vice-versa.** On a les relations suivantes : $c_0 = \frac{1}{2}a_0$;

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) \text{ pour } n \geq 1 \tag{3.20}$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n) \text{ pour } n \geq 1 \tag{3.21}$$

On obtient ensuite directement les « expressions inverses » suivantes :

$$a_n = (c_n + c_{-n}) \text{ pour } n \geq 0 \tag{3.22}$$

$$b_n = i(c_n - c_{-n}) \text{ pour } n \geq 1 \tag{3.23}$$

Les expressions de $\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ (resp. $\{a_n, b_n\}_{n\geq 1}$) ci-dessus sont utiles pour passer de la forme complexe à la forme réelle d'une série de Fourier et vice-versa.

3.4. **Théorème de Jordan-Dirichlet : conditions suffisantes de convergence.** Jusqu'à présent nous avions effectué des calculs « formels » en supposant que les séries considérées étaient convergentes ; hypothèse absolument indispensable pour pouvoir mener les calculs présentés. A présent posons la question de savoir sous quelles conditions une fonction F peut être développée en série de Fourier.

Le théorème dit de Jordan-Dirichlet (fréquemment appelé théorème de Dirichlet) ci-dessous fournit des conditions *suffisantes* pour qu'une fonction T-périodique soit représentable par une série de Fourier, et que la série de Fourier correspondante soit convergente.

Théorème 1. *Soit une fonction $F(x)$ définie de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$; F de classe C^1 par morceaux et périodique de période T.*
La série de Fourier $S_N(x)$ associée, voir (3.2) en forme réelle ou (3.16) en forme complexe, est convergente en tout point x. Sa valeur limite $S(x) = \lim_{N\to\infty} S_N(x)$ est égale à :

- $F(x)$ aux points x où F est continue,
- $\frac{1}{2}(F(x^+) + F(x^-))$ aux points x où F est discontinue (discontinuité de 1ère espèce).

En résumé, toute fonction F suffisamment régulière (de classe C^1 par morceaux), présentant « au pire » des points de discontinuité de 1ère espèce (F reste à variations bornées), F T- périodique, peut être développée en série de Fourier (réelle ou complexe).

Lorsqu'elle existe, cette décomposition est unique.

La principale limitation de la décomposition d'une fonction F en somme d'harmoniques est donc l'aspect périodique de la fonction considérée. Une série de Fourier permet de développer un *phénomène périodique en une série de sinus et cosinus (ou exponentielles complexes).*

En pratique une onde sonore par exemple peut être représentée comme une sommes d'harmoniques dont les fréquences sont en nombre (potentiellement) infini mais discret et dénombrable. Une tension électrique périodique peut être représentée par une série de Fourier ; là aussi comme une superposition d'un ensemble potentiellement infini mais dénombrable de tensions alternatives de fréquences bien définies. En optique, une lumière constituée d'un *ensemble discret de longueurs d'onde* peut-être également être représentée par une série de Fourier.

3.5. **Interprétation de la décomposition en SF en termes de base.** L'expression de la série de Fourier forme complexe (3.16) peut s'interpréter comme étant le développement de $F(x)$ dans la base des harmoniques $\{\exp(i\,\omega n x)\}_{n\in\mathbb{Z}}$.

Soit $< .,. >$ le *produit scalaire hermitien* de l'espace des fonctions périodiques de carré intégrable (espace noté $L^2_{\#}(\mathbb{C})$) :

$$< f, g >= \frac{1}{T}\int_0^T f(x)\;\bar{g}(x)\,dx$$

On a alors :

$$c_n =< F(x), \exp(i\,\omega n x) > \tag{3.24}$$

Et donc :

$$S_N(x) = \sum_{n=-N}^{n=+N} < F(x), \exp(i\,\omega n x) > \exp(i\,\omega n x) \tag{3.25}$$

$S_N(x)$ est donc le projeté orthogonal de $F(x)$ dans la base des harmoniques $\{\exp(i\,\omega n x)\}_n$.

Les coefficients de Fourier $\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ représentent la fonction dans cette base; ces coefficients sont potentiellement en nombre infini mais dénombrables.

3.6. **Régularité et décroissance des coefficients.** Notons que puisque la série de Fourier $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \exp(i\,\omega n x)$ est convergente (par hypothèse jusqu'à présent) alors nécessairement :

$$|c_n \exp(i\,\omega n x)| = |c_n| \to_{n\to\infty} 0 \tag{3.26}$$

Ce résultat est illustré graphiquement sur la figure qui suit.

Aussi on peut montrer (exercice : intégration par parties...) que :

$$c_n(F') = i\,\omega n\, c_n(F) \tag{3.27}$$

C'est à dire que les coefficients (complexes) de Fourier de la fonction dérivée $F'(x)$ se déduisent simplement de ceux de la fonction originale $F(x)$.

Par récurrence, pour F de classe C^{k+1} au moins, on obtient que :

$$c_n(F^{(k+1)}) = (i\,\omega n)^{k+1}\, c_n(F) \tag{3.28}$$

Sachant que nécessairement $|c_n(F^{(p)})| \to_{n\to\infty} 0$ pour tout p, $0 \le p \le (k+1)$, on a alors :

$$|c_n(F)| \sim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{k+1}}\left|c_n(F^{(k+1)})\right| \tag{3.29}$$

Autrement dit le module des coefficients de Fourier (complexes) de $F(x)$ décroissent d'autant plus vite que F est régulière.

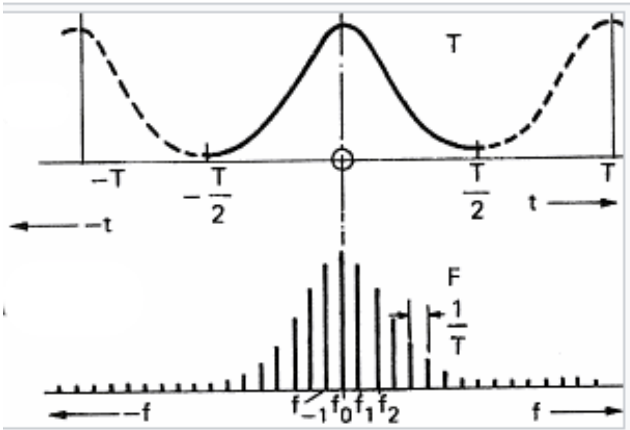

FIGURE 3.1. (Haut) Un signal régulier T-périodique réel $F(t)$, $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. (Bas) Module de ses coefficients $|c_n|$ vs n = représentation fréquentielle de F. Notons la symétrie de $|c_n|$ et aussi la décroissance de $|c_n|$ lorsque n croît.

Notons que nous retrouverons un résultat tout à fait similaire dans le cadre de la transformée (continue) de Fourier (prochain chapitre).

3.7. **Egalité de Parseval et conservation d'énergie.** Pour un signal physique $F(x)$, F à valeurs réelles ou complexes, l'énergie E de ce signal F est définie par la quantité :

$$E = \frac{1}{T}\int_0^T |F(x)|^2\,dx \tag{3.30}$$

L'*égalité de Parseval* stipule alors que :

$$\boxed{\frac{1}{T}\int_0^T |F(x)|^2\,dx = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2 = \frac{1}{4}|a_0|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n\geq 1}(|a_n|^2 + |b_n|^2)} \tag{3.31}$$

Autrement dit l'énergie du signal est conservée dans l'espace des harmoniques (l'« espace de Fourier »).

Par ailleurs, étant donné que les (modules des) coefficients sont décroissants en n (d'autant plus rapidement que le signal est régulier), les modes sont de moins en moins énergétiques lorsque n croît. Ce phénomène se remarque graphiquement sur la figure ci-dessus.

Enfin on peut montrer que à N modes fixé, la somme partielle de Fourier S_N minimise l'écart quadratique à F :

$$\frac{1}{T}\int_0^T |F(x) - S_N(x)|^2\,dx = \min_{\phi(x)}\left(\frac{1}{T}\int_0^T |F(x) - \Phi(x)|^2\,dx\right) \tag{3.32}$$

En d'autres termes, la décomposition d'un signal en série de Fourier est optimale en terme de moyenne quadratique.

3.8. **Discontinuité et phénomène de Gibbs.** Le phénomène de Gibbs désigne les oscillations que l'on observe en approximation aux voisinages des points de discontinuité de la fonction approchée. Dans le présent contexte, $F(x)$ est approchée par $S_N(x)$.

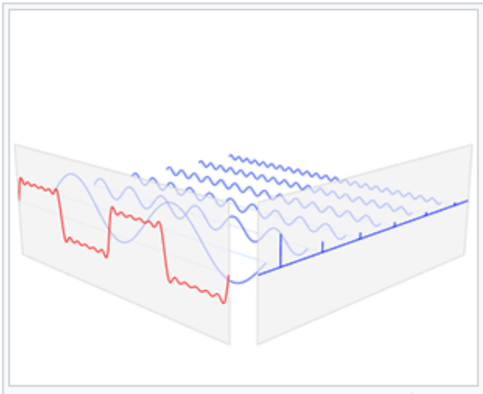

FIGURE 3.2. La fonction créneau T-périodique $F(x)$; ses 5 premières harmoniques et le module des coefficients $|c_n|$ correspondants ($n = 1, .., 5$). Image extraite de Wikipédia.

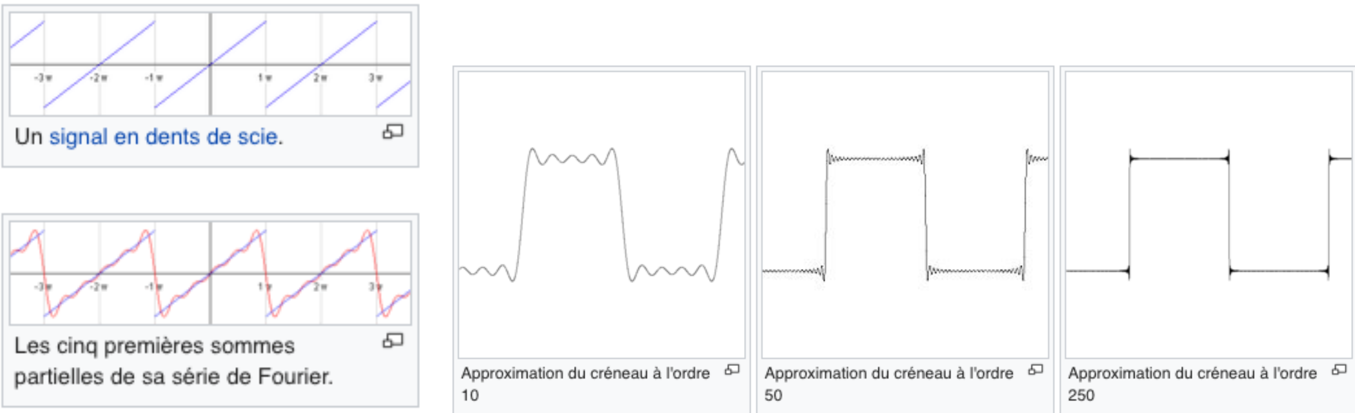

FIGURE 3.3. Approximation de fonctions $F(x)$ réelles, discontinues, par $S_N(x)$ et phénomène de Gibbs.
(G) Fonction linéaire par morceaux, discontinue. N=5 i.e. les 5 premiers modes considérés.
(D) Fonction créneau (constant par morceaux avec discontinuités). N=10, 50 et 250 : les oscillations aux discontinuités ne s'estompent pas pleinement.
Sources images : Wikipédia.

Pour illustrer ce phénomène de Gibbs, cf les figures ci-dessous.

Le k-ième polynôme trigonométrique de la somme partielle de Fourier $S_N(x)$ est de classe C^∞ donc a-fortiori continue (!). Il ne peut alors approcher *uniformément* $F(x)$ en ses points de discontinuités...

En dehors des voisinages de points de discontinuités, la série de Fourier converge uniformément vers $F(x)$: sur la figure $S_N(x)$ est graphiquement indiscernable pour $N = 250$.

Par contre, aux voisinages des points de discontinuité, $S_N(x)$ présente une oscillation (un « sursaut ») qui reste à variation bornée non nulle. En effet si l'on considère N de plus en plus grand, ces sursauts (non souhaités) convergent vers une valeur finie non nulle... Il s'agit du phénomène dit de Gibbs.

Et dans le cas d'une fonction non périodique ? Si la fonction considérée $F(x)$ est C^1 par morceaux dans un intervalle $I = [-T/2, T/2]$ donné, il est alors envisageable de prolonger F par périodicité. Ensuite sa série de Fourier $S(x)$ sera convergente vers $F(x)$, ou bien $\frac{1}{2}(F(x^+) + F(x^-))$ selon, mais *seulement aux points x appartenant à I bien entendu.*

Notons qu'il peut être judicieux de considérer un intervalle $I = [0, T/2]$ puis de prolonger par symétrie (ex. en fonction paire) puis par périodicité ; le développement en série de Fourier n'en sera alors que plus simple.

4. Exemples de développements de fonctions en séries de Fourier

Calculons les séries de Fourier de quelques fonctions simples mais usuelles.

4.1. **Fonction chapeau, continue.** Soit la fonction $T-$périodique qui vérifie : $F(x) = |x|$ pour $x \in [-T/2, +T/2]$. Tracer le graphe de F.

Cette fonction est C^1 par morceaux et bornée. D'après le théorème de Jordan-Dirichlet, elle admet un développement en série de Fourier.

Calculons son Développement en Série de Fourier (DSF).

Cette fonction étant réelle paire, il est judicieux de considérer son DSF $S(x)$ sous forme réelle qui pour une fonction paire s'écrit :

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} a_n \cos(\omega n x) \tag{4.1}$$

Le coefficient a_0 est :

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} |x|\, dx = \frac{4}{T}\int_0^{+T/2} |x|\, dx = \frac{T}{2} \tag{4.2}$$

Les coefficients a_n, $n \geq 1$, s'écrivent comme suit du fait de la parité de l'intégrande $(F(x)\cos(\omega n x))$:

$$a_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} x\cos(\omega n x) dx$$

Après intégration par parties, on obtient :

$$a_n = \frac{4}{T}\frac{1}{n\omega}[x\sin(\omega n x)]_0^{T/2} - \frac{4}{T}\frac{1}{n\omega}\int_0^{T/2} \sin(\omega n x)dx = ... = \frac{T}{\pi^2 n^2}(\cos(n\pi) - 1)$$

Soit :

$$a_n = \frac{T}{(n\pi)^2}((-1)^n - 1) = \begin{cases} 0 & \text{pour } n \text{ pair, } n \geq 2 \\ \frac{-2T}{(n\pi)^2} & \text{pour } n \text{ impair, } n \geq 1 \end{cases} \tag{4.3}$$

D'où le DSF $S(x)$ de $F(x)$:

$$S(x) = \frac{T}{4} + \frac{(-2T)}{\pi^2}\cos(\frac{2\pi}{T}x) + \frac{(-2T)}{9\pi^2}\cos(\frac{2\pi}{T}3x) + \text{etc} \tag{4.4}$$

En vertu des propriétés de F et du théorème de Jordan-Dirichlet, cette série $S(x)$ converge vers $F(x)$ en tout point x de $\mathbb{R}$.

4.2. **Fonction linéaire par morceaux, discontinue.** On considère la fonction F, 2π périodique, telle que : $F(x) = x$ pour $x \in]-\pi, +\pi]$. Tracer le graphe de F.

Cette fonction est C^1 par morceaux et bornée donc d'après le théorème de Jordan-Dirichlet elle admet un Développement en Série de Fourier (DSF).

Calculons son DSF.

Cette fonction étant réelle impaire, son DSF $S(x)$ sous forme réelle s'écrit :

(4.5) $$S(x) = \sum_{n \geq 1} b_n \sin(\omega n x)$$

Avec les coefficients b_n, $n \geq 1$, qui s'écrivent comme suit du fait de la parité de l'intégrande $(F(x)\sin(\omega n x))$:

$$b_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} x \sin(\omega n x) dx$$

Après intégration par parties, on obtient :

(4.6) $$b_n = ...$$

A ecrire en exercice.

D'où le DSF $S(x)$ de $F(x)$:

(4.7) $$S(x) = ... + \text{etc}$$

Et en vertu des propriétés de F et du théorème, cette série $S(x)$ converge vers $F(x)$ en tout point x de R.

L'égalité $F(x) = S(x)$ est vérifiée en tout point x où F est continue.

A contrario en ses points de discontinuité, $S(x)$ est égale à la moyenne arithmétique des limites de F à gauche et à droite, c'est-à-dire à zéro.

4.3. **Fonction créneau (discontinue).** On considère la fonction F, 2π périodique, telle que : $F(x) = -1$ pour $x \in]-\pi, 0]$ et $F(x) = 1$ pour $x \in]0, +\pi]$.

Cette fonction est C^1 par morceaux et bornée. D'après le théorème de Jordan-Dirichlet, elle admet un DSF.

Les coefficients de sa série de Fourier, forme réelle, sont :

A ecrire en exercice.

L'égalité $F(x) = S(x)$ est vérifiée en tout point x où F est continue.

En ses points de discontinuité, $S(x)$ est égale à la moyenne arithmétique des limites de F à gauche et à droite, c'est-à-dire à zéro.