TP: Résolution itérative de systèmes linéaires

November 24, 2016

On s'intéresse à la résolution du système linéaire $A\,x = b$, où $A \in M_n(\mathbb{R})$ est la matrice définie par

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 4 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & 4 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Cette matrice intervient dans la détermination d'une spline (fonction polynomiale par morceaux) d'interpolation. Cette matrice est symétrique et elle est "creuse" (elle contient beaucoup de zéros. On verra que cela a des conséquences sur les couts de calcul. Dans la suite du TP, on présente plusieurs méthodes de résolution de $A\,x = b$.

Méthode indirecte de résolution

Dans cette section, on fixe $n = 100$

Méthode de Jacobi

1. On décompose la matrice A sous la forme $A = D - E$ où D est la diagonale de A: montrer que résoudre $A\,x = b$ est équivalent à trouver x tel que $x = D^{-1}Ex + D^{-1}b$
2. De la question précédente, déduire un algorithme (basé sur le théorème du point fixe) permettant de calculer une valeur approchée de x_0
3. Créer un fichier methode-indirect-Jacobi.py
4. Programmer la méthode et illustrer sa vitesse de convergence. Comparer avec la vitesse de convergence théorique (on calculera le rayon spectral de $D^{-1}E$).

Méthode de Gauss Seidel

1. Programmer un algorithme de résolution d'un système $Lx = y$ où L est une matrice triangulaire inféireure. Quel est le nombre d'opérations néssaires pour une matrice L de taille $n \times n$?
2. On décompose la matrice A sous la forme $A = L - E$ où L est la matrice triangulaire inférieure de A: montrer que résoudre $A\,x = b$ est équivalent à trouver x tel que $x = L^{-1}Ex + L^{-1}b$
3. De la question précédente, déduire un algorithme (basé sur le théorème du point fixe) permettant de calculer une valeur approchée de x_0
4. Créer un fichier methode-indirect-Jacobi.py
5. Programmer la méthode et illustrer sa vitesse de convergence. Comparer avec la vitesse de convergence théorique (on calculera le rayon spectral de $L^{-1}E$).
6. Comparer avec la vitesse de convergence de la méthode de Jacobi.

Méthode du Gradient

1. Créer un fichier methode-indirect-Gradient.py
2. Montrer que la matrice A est symétrique et définie positive (on montrera que les valeurs propres sont comprises entre 2 et 6)
3. Soit $J : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $J(x) = \dfrac{1}{2} < Ax, x > - < b, x >$: programmer l'algorithme du Gradient pour résoudre $A\,x_0 = b$ avec $b \in \mathbb{R}^n$ tel que $b_i = 1$, $\forall i$. En comparant les itérées avec la valeur de x_0 trouvée à la section précédente, illustrer la vitesse de convergence de la méthode (tracer le logarithme de la norme de l'erreur).

Exercice de synthèse

Reprendre les questions des sections précédentes avec la matrice B donnée par

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$