Solution Chapitre VI

Exercice 1

Rappel Une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ symétrique est définie positive si et seulement si $\det(\Delta_i) > 0 \quad \forall i = 1 \dots n$

où Δ_i est la sous matrice de A formée des i premières lignes et colonnes.

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$ définie positive ssi
$$1 > 0$$
$$1 - a^2 > 0 \iff |a| < 1$$
$$1 + 2a^3 - 3a^2 > 0$$

on a $\quad 1 + 2a^3 - 3a^2 = (a-1)(2a^2 - a - 1) = (a-1)^2(2a+1) > 0$

si $\quad a > -\frac{1}{2}$

Donc A définie positive si $-\frac{1}{2} < a < 1$.

2) La méthode de Gauss Seidel converge pour toute matrice symétrique définie positive. Ici $a \in]-\frac{1}{2} ; 1[$

3) $$J = -a\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4) On considère le spectre de $\tilde{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Ses valeurs propres sont $(-1;-1;2)$

D'où $\quad \rho(J) = 2|a|$. La méthode de Jacobi converge si $|a| < \frac{1}{2}$

5) $$\mathcal{L}_1 = -a\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -a & 1-a \\ 0 & a^2-a & a^2-2a \end{pmatrix}$$

Valeurs propres de $\mathcal{L}_1$: $(0 ; -a\lambda_1 ; -a\lambda_2)$

où λ_i racines de :
$$X^2 - a(3-a)X + a = 0.$$

<u>Deux cas</u> si $a^2(3-a)^2 < 4a$, λ_i sont complexes conjuguées de module $\sqrt{a}$

Dans ce cas $\rho(\mathcal{L}_1) = |a|^{3/2}$. On peut montrer que c'est toujours le cas si $a \in]-\frac{1}{2} ; 1[$.

6) La méthode converge plus vite si $|a|^{3/2} < 2|a|$ soit $\sqrt{|a|} < 2$, c'est toujours le cas.

(7) Cf Cours.