INSA TOULOUSE
POIC $2^{\text{ème}}$ année

Chapitre 6 : Méthodes itératives de résolution de systèmes linéaires

Dans cette feuille, on liste les questions de cours/exercices types relatifs au chapitre sur la résolution de systèmes linéaires à l'aide de méthodes indirectes que vous devez connaître/savoir faire.

Questions de cours

1. Décrire le principe des méthodes itératives de résolution de systèmes linéaires.
2. A quelle condition une méthode itérative de résolution du système $Ax = b$ basée sur la décomposition $A = M - N$ converge-t-elle ?
3. Ecrire l'algorithme associé à la méthode de Jacobi.
4. Ecrire l'algorithme associé à la méthode de Gauss-Seidel
5. Ecrire l'algorithme associé à la méthode de relaxation.
6. Donner le critère nécessaire de convergence de la méthode de relaxation.

Exercice 1. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$.

1. Pour quelles valeurs de a, la matrice A est-elle définie positive ?
2. Pour quelles valeurs de a la méthode de Gauss-Seidel est-elle convergente ?
3. Ecrire la matrice J de l'itération de Jacobi.
4. Pour quelles valeurs de a la méthode de Jacobi converge-t-elle ?
5. Ecrire la matrice $\mathcal{L}_1$ de l'itération de Gauss Seidel. Calculer $\rho(\mathcal{L}_1)$.
6. Pour quelles valeurs de a la méthode de Gauss-Seidel converge-t-elle plus vite que celle de Jacobi.
7. Ecrire la matrice $\mathcal{L}_\omega$ liée à la méthode de relaxation et donner des conditions sur a et ω pour avoir convergence.

Exercice 2. (Tiré du site exo7) Etant donné une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$, on rappelle que la norme de A subordonnée à la norme infinie est donnée par

$$\|A\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1}^{n} |A_{ij}|, \quad \text{et} \quad |Ax|_\infty \leq \|A\|_\infty |x|_\infty, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

On considère le système $Ax = b$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Donner la décomposition LU de A et en déduire que $Ax = b$ possède une solution unique x^*.
2. Ecrire une itération du schéma de Gauss-Seidel associé à la résolution de $Ax = b$.
3. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^5$ les itérées du schéma de Gauss-Seidel. On note $e_n = X_n - x^*$. Montrer qu'il existe $a \in [0, 1[$ tel que
$$|e_{n+1}|_\infty \leq a\,|e_n|_\infty, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$
En déduire la convergence de la suite.
4. Déterminer la matrice $\mathcal{L}_1$ de Gauss-Seidel associée à A et calculer $\|\mathcal{L}_1\|_\infty$. En déduire la convergence de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers x^*.

Correction : disponible à cette adresse : http ://exo7.emath.fr/ficpdf/fic00028.pdf