

Chapitre 5 : Conditionnement et Normes

Dans cette feuille, on liste les questions de cours/exercices types relatifs au chapitre sur la résolution directe de systèmes linéaires que vous devez connaître/savoir faire.

Questions de cours

1. Donner la définition d'une norme sur \mathbb{R}^n ($n \in \mathbb{N}$)
2. Donner deux exemples de normes sur \mathbb{R}^3
3. Donner la définition d'une norme matricielle subordonnée à une norme $N : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^+$
4. Définition du conditionnement d'une matrice A pour une norme N donnée.
5. Savoir utiliser le conditionnement d'une matrice pour expliquer la propagation d'erreur dans la résolution d'un système linéaire $Ax = b$ avec $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$).

Exercice 1. Calculer la norme 1, la norme infinie et la norme 2 des vecteurs suivants :

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad x_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad x_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 10 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. Soit $\varepsilon > 0$. On considère les deux systèmes linéaires

$$\begin{pmatrix} 1 & 1+\varepsilon \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1+\varepsilon \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+\varepsilon \\ 2 \end{pmatrix}$$

Le deuxième système est une perturbation du premier : on suppose commettre une erreur sur le second membre d'ordre ε et on se pose la question de l'erreur relative commise sur la solution x_1, x_2 .

1. Calculer la solution de chaque système.
2. Calculer l'erreur relative sur le second membre du système linéaire.
3. On note $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ et $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$. Calculer $N_1(x - y)/N_1(x)$
4. Donner un ordre de grandeur pour le conditionnement de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1+\varepsilon \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
5. Calculer le conditionnement de la matrice A pour la norme subordonnée à la norme 1 (formules dans le polycopié de cours) et expliquer le résultat précédent.