INSA TOULOUSE
POIC 2ème année

Chapitre 2 : Résolution d'équations non linéaires

Dans cette feuille, on liste les questions de cours/exercices types relatifs au chapitre sur la résolution d'équations non linéaires que vous devez connaître/savoir faire.

Questions de cours

1. Soit $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $F(a)F(b) < 0$ et F strictement monotone : donner l'algorithme de dichotomie permettant de trouver l'unique solution $x^* \in [a, b]$ de l'équation $F(x^*) = 0$.
2. Donner une majoration de l'erreur associée à la méthode de dichotomie.
3. Ecrire l'algorithme de la méthode du point fixe pour résoudre une équation de la forme $F(x) = 0$ et donner des conditions assurant sa convergence.
4. Donner une majoration de l'erreur associée à la méthode du point fixe.
5. Ecrire l'algorithme de Newton pour la résolution de $F(x) = 0$.
6. Ecrire l'algorithme de la méthode de la sécante.
7. Définir l'ordre de convergence d'une méthode de résolution d'une équation $F(x) = 0$
8. Quelle est l'ordre de convergence de la méthode de Newton ? de la méthode du point fixe ? de la sécante ?

Exercice 1. On souhaite résoudre calculer une valeur approchée de $x^* = \sqrt{3}$. Ceci revient à résoudre léquation $F(x) = 0$ avec $F(x) = x^2 - 3$.

1. Montrer que l'équation $F(x) = 0$ possède une solution unique sur l'intervalle $[a, b]$ avec $a = 1$ et $b = 2$.

   Indication : montrer que F est continue, strictement croissante et $F(a)F(b) < 0$. Conclure avec le théorème des valeurs intermédiaires
2. Ecrire l'algorithme de la méthode de dichotomie et calculer le nombre d'itérations nécessaire pour obtenir une approximation de x^* à $\varepsilon_1 = 10^{-6}$ et $\varepsilon_2 = 10^{-12}$ près.

   Indication : question de cours. Si on note $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites générées par l'algorithme de dichotomie, la distance entre a_n ou b_n et le zéro de F (qu'on note par la suite x^*) est au plus égale à $(b - a)/2^n$. On conclut en résolvant l'inéquation $(b - a)/2^n \leq \varepsilon_j, j = 1, 2$ (passer au logarithme...).
3. Ecrire l'algorithme de Newton associé à la résolution de $F(x) = 0$.

   Indication : appliquer le cours ! On trouve $x_{n+1} = (x_n + 3/x_n)/2$.
4. On initialise la méthode de Newton en choisissant $x_0 = 2$.
   (a) Calculer x_1, x_2, x_3 donnés par l'algorithme de Newton (sous forme de fractions).
   (b) Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ générées par l'algorithme de Newton est décroissante et minorée par x^*. Montrer que la suite converge vers x^*.
   Indication : Ici, $x^* = \sqrt{3}$. Commencer par montrer que $x_{n+1} - \sqrt{3} = (x_n - \sqrt{3})^2/(2x_n)$. Puis faire une récurrence pour montrer que $x_n \geq \sqrt{3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Enfin calcul la

différence $x_{n+1} - x_n$ et montrer que c'est négatif. Conclure avec un théorème de 1A du type "ne suite décroissante minorée..."

(c) Montrer que $|x_1 - x^*| = x_1 - x^* \leq \frac{1}{10}$.
<u>Indication :</u> $x_1 = 7/4$. Montrer que $7/4 - 1/10 \leq \sqrt{3}$ (élever au carré...)

(d) Combien d'itérations n de l'algorithme de Newton faut-il pour que x_n possède 32 chiffres significatifs après la virgule ?
<u>Indication</u> Si on note $e_n = |x_n - \sqrt{3}|$, montrer qu'on a $e_{n+1} \leq e_n^2$: à partir de $n = 1$, on double le nombre de chiffre signficatif....Conclure.

Exercice 2. Rappels de première année

- *Théorème des valeurs intermédiaires* Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue telle que $f(a)f(b) < 0$ alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = 0$
- *Théorème des accroissements finis* Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = \exp(x) - 3, \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

1. Sur un même graphe, tracer la courbe représentant la fonction f et la droite déquation $y = x$. Graphiquement, combien de solutions possède l'équation $f(x) = x$?
<u>Indication :</u> Trivial. Nombre de solutions : 2
2. Considérons la fonction $g(x) = f(x) - x$. Donner le tableau de variation de g et justifier, en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, l'existence d'un unique $z > 0$ tel que $g(z) = 0$. En déduire que $f(x) > x$ pour tout $x > z$.
<u>Indication</u> $g'(x) = \exp(x) - 1$ donc g décroissante si $x < 0$ et croissante si $x > 0$. Ensuite $g(0) < 0$ et g tend vers $+\infty$ lorsque $x \to \infty$. De plus g continue...Appliquer le TVI pour montrer l'existence de z. Ensuite g strictement croissante sur $[0, +\infty[$ donc $g(x) > g(z) = 0$ si $x > z$
3. Montrer que $z \in [1, 2]$ (on peut utiliser la calculatrice pour évaluer la fonction g).
<u>Indication</u> : g est continue sur $[1, 2]$ et on vérifie avec la calculatrice (pour une fois !) que $g(1)g(2) < 0$. Appliquer le TVI pour conclure.
4. Considérons la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $z_0 = 2$ et $z_{n+1} = f(z_n)$. Montrer que $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.
<u>Indication</u>. Montrer par récurrence que $z_n \geq z$ pour tout n et ensuite que $z_{n+1} \geq z_n$. Il suffit d'utiliser le fait que $f(x) > x$ pour tout $x > z$.
5. *Supposons* que $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l : que vaut l ? En déduire que $\lim_{n\to\infty} z_n = +\infty$.
<u>Indication :</u> Si z_n converge vers l alors en passant à la limite dans $z_{n+1} = f(z_n)$, on a nécessairement $l = z$. Or pour tout n, $z_n \geq z_0 > z$ donc $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut converger vers l. Comme elle est croissante, elle tend donc vers $+\infty$ (cf cours 1A)

On voit donc que la méthode de point fixe est inopérante pour résoudre $f(x) = x$. Ceci est équivalent à résoudre $g(x) = 0$. On va montrer que la méthode de Newton permet de résoudre le problème.

1. Montrer que pour tout $x > z$, on a $\exp(x) - \exp(z) \leq \exp(x)(x - z)$ (indication : théorème des accroissements finis)
<u>Indication :</u> L'égalité des accroissements finis nous donne l'existence de $\alpha \in [z, x]$ tel que
$$\exp(x) - \exp(z) = \exp(\alpha)(x - z).$$

On conclut en remarquant que $\exp(\alpha) \leq \exp(x)$.

2. Montrer par récurrence que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$x_0 = 2 > z, \qquad x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)}$$

vérifie $x_n > z$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
<u>Indication :</u> faire une récurrence et utiliser le résultat précédent.

3. En déduire que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
<u>Indication :</u> Montrer que $x_{n+1} - x_n \leq 0$ (utiliser le fait que $x_n \geq zpourtoutn$.

4. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers z.
<u>Indication</u> (x_n) décroissante, minorée.....