

# TP2 Intégration Numérique

September 9, 2016

## Objectifs de la séance

1. Interpolation et intégration numérique
2. Utilisations des commandes PYTHON liées à l'usage des fonctions.

## Intégration numérique

Le but est de mettre en évidence l'ordre de convergence des différentes méthodes d'intégration numérique.

**Exemple 1: calcul de  $I = \int_0^1 \exp(x) dx$**

1. Calculer la valeur explicite de  $I = \int_0^1 \exp(x) dx$
2. Créer un fichier "Exemple1.py" dans lequel vous écrirez votre script PYTHON.
3. Ecrire un programme pour calculer la valeur approchée de I à l'aide de la méthode des rectangles, des trapèzes et de Simpson utilisant les points de discrétisation  $x_k = \frac{k}{N}$  pour  $k = 0, \dots, N - 1$ . On notera respectivement  $I_N^1$ ,  $I_N^2$  et  $I_N^3$  les valeurs approchées de I calculées avec ces trois méthodes.
4. Tracer  $\log |I_N^j - I|$  en fonction de  $\log N$  (on créera au préalable un vecteur  $N$  contenant les valeurs 10, 20, ..., 100).
5. A l'aide d'une régression linéaire (utiliser la commande PYTHON adaptée), déterminer la pente de la droite aux moindres carrés pour chaque courbe et donner l'ordre de convergence de chaque méthode.

**Exemple 2: calcul de  $J = \int_0^1 |3x^2 - 1| dx$**

1. Créer un fichier "Exemple2.py dans lequel vous écrirez votre script PYTHON." Etudier et tracer le graphe de la fonction  $g : x \mapsto |3x^2 - 1|$ . Quelle est la régularité de la fonction  $g$ ?
2. Etudier numériquement la convergence des différentes méthodes: qu'observez vous pour la méthode de Simpson?
3. Reprendre l'étude de convergence en séparant l'intégrale sous la forme

$$J = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} |3x^2 - 1| dx + \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 |3x^2 - 1| dx$$

### Exemple 3: Méthode des rectangles pour les fonctions périodiques

Considérons les fonctions  $f_j$ ,  $j = 1, \dots, 5$  définies sur  $[0, 1]$  par

$$f_1(x) = \sin(x), \quad f_j(x) = x^j(1-x)^j \cos(x), \quad (j = 2, 3, 4), \quad f_5(x) = \frac{\sin^2(2\pi x)}{1 + \sin^2(2\pi x)}.$$

et prolongées par 1-périodicité.

1. Etudier la régularité maximale de chacune de ces fonctions.
2. Créer un fichier “Exemple3.py”
3. Illustrer numériquement la convergence de la méthode des rectangles et des trapèzes pour le calcul de  $\int_0^1 f_j(x)dx$  pour  $j = 1, \dots, 5$ . Qu’observe-t-on?
4. En déduire une relation entre l’ordre de convergence de la méthode des rectangles et la régularité des fonctions périodiques.

### Exercices de synthèse

**Intégration numérique** Reprendre l’exercice 1 en utilisant la formule d’approximation suivante

$$\int_0^1 f(x)dx \approx \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f\left(\frac{x_k + x_{k-1}}{2}\right), \quad x_k = \frac{k}{N}.$$