TP1-3IMACS

September 12, 2017

1 TP1: Erreurs numériques

1.1 Objectifs

1. Connaître les commandes de base de Python pour définir et tracer des fonctions.
2. Comprendre les mécanismes à l'origine des erreurs numériques.
3. Savoir reconnaître et corriger un alhorithme instable.

1.2 Utilisation de base de Python

1.2.1 Exercice

On veut tracer les polynômes $P(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ et Q(x)=$c\,x^2 + b\,x + a$ pour x compris entre 0 et 2.
Définir les fonctions P et Q pour $a = 10$, $b = -15$ et $c = 5$.

1. Créer un vecteur X allant de 0 à 2 avec un pas de h que vous pourrez varier au besoin.
2. Créer deux vecteurs Y_1 et Y_2 contenant les images par P et Q du vecteur X.
3. Tracer les graphes de Y_1 et Y_2 en fonction de X. Indiquer les axes, mettre un titre.

```
In [ ]: Insérer ici votre code commenté.
```

1.3 Exemple d'erreurs numériques

1.3.1 Exemple 1: calcul de $f(x) = \dfrac{(1+x)-1}{x}$ pour x proche de 0.

L'objectif de ce premier exemple est de mettre en évidence le mécanisme d'absorption.
Travail à réaliser

1. Initialiser le coefficient $a = 0.5$. Définir la fonction f
2. Créer un vecteur n allant de 0 à 100 avec un pas de 1.
3. Créer un vecteur X contenant la valeur a aux puissances contenues dans le vecteur n.
4. Créer un vecteur Y contenant les valeurs de $f(X)$
5. Tracer $f(X)$ en fonction de $\log(X)$. Mettre un titre, les axes.
6. Faire varier a autour de 0.5 et observez l'allure de la courbe.
7. En fonction des résultats obtenus, déterminer la taille de la mantisse.

```
In [ ]: Insérer ici votre code commenté.
```

1.3.2 Exemple 2: Calcul de $\lim_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(x)}{x^2}$.

Travail à réaliser

1. Montrer que $1-\cos(x) = 2\sin^2(\frac{x}{2})$. En déduire $\lim_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(x)}{x^2}$.
2. Créer un vecteur n allant de 0 à 100 avec un pas de 1.
3. Créer un vecteur X contenant les valeurs $(1/2)^k$ avec $k \in \{0, \cdots, 100\}$.
4. Définir $f : x \mapsto \dfrac{1-\cos(x)}{x^2}$ et $g : x \mapsto \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sin(x/2)}{x/2}\right)^2$.
5. Représenter f et g. Quelle est la formulation la plus adéquate pour étudier la limite de f en $x = 0$. Expliquer.

```
In [ ]: Insérer ici votre code commenté.
```

1.3.3 Exemple 3: Calcul d'une dérivée

Soit $f : x \mapsto \sin(x)$. On souhaite calculer numériquement la dérivée de f en $x = 1$ à l'aide de la formule

$$f'(1) = \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}.$$

Travail à réaliser

1. Créer un vecteur H contenant les valeurs 10^{-k} pour $k \in \{0, \ldots, 16\}$ avec un pas de 1.
2. Pour tout $h \in \mathbb{R}$, on note $e(h) = \left| f'(1) - \dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} \right|$.Représenter $e(H)$: pour quelle valeur de h a-t-on la meilleure approximation de $f'(1)$?
3. Sachant que la fonction sin est fournie avec une erreur de l'ordre de la précision machine, not'ee u, on admet que
$$|e(h)| \leq \frac{h}{2}\sup_{\xi\in[1,1+h]}|f''(\xi)| + \frac{2\,u}{h}.$$
Pour quelle valeur de h la fonction e est minimale?
4. Expliquer le phénomène observé et donner un ordre de grandeur de u.
5. Refaire l'exercice en utilisant la formule $f'(1) = \lim_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1-h)}{2h}$.

```
In [ ]: Insérer ici votre code commenté.
```

1.4 Stabilité d'un algorithme

Cette partie vise à montrer l'instabilité associée à certaines relations de récurrence. Les intégrales $I_k = \int_0^1 x^k \exp(-x)dx$, avec $k \in \mathbb{N}$, peuvent être calculées selon la relation de récurrence suivante:

$$I_0 = 1 - \frac{1}{e}, \qquad I_{k+1} = (k+1)\,I_k - \frac{1}{e}.$$

Travail à réaliser

1. Utiliser la relation de récurrence pour calculer les valeurs I_0 à I_{30}. Créer le vecteur I_c qui contiendra les valeurs I_k pour k allant de 0 à 30.

La relation de récurrence peut aussi s'écrire $I_k = \dfrac{I_{k+1} + \dfrac{1}{e}}{k+1}$.

2. Utiliser ce deuxième algorithme pour calculer les valeurs I_{30} à I_0 en choisissant la valeur initiale $I_{30} = 1$. Stocker les valeurs obtenues dans le vecteur I_d.

3. Faire un graphe représentant I_c et I_d en fonction du nombre d'itérations pour visualiser les résultats.

```
In [ ]: Insérer ici votre code commenté.
```

1.5 Exercices de synthèse

1.5.1 Exercice 1

Donner un programme permettant de calculer correctement les fonctions suivantes au voisinage de $x = 0$ (on commencera par en donner un équivalent):

$$f(x) = \sqrt{1+x} - 1, \qquad g(x) = \frac{1-\cos(x)}{\sin(x)}.$$

1.5.2 Exercice 2

On souhaite calculer les intégrales

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 \leq n \leq 50, \quad I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^2 + 9\,x + 20} dx.$$

1. Montrer que les I_n vérifient une relation de récurrence $I_{n+1} = a_n\, I_n + b_n\, I_{n-1} + c_n$ où a_n, b_n, c_n ne dépendent que de n.

2. En supposant I_0, I_1 donnés avec une erreur ε, déterminer l'erreur commise e_n sur le calcul de I_n en utilisant la formule de récurrence.

3. Montrer que $\dfrac{1}{30(n+1)} \leq I_n \leq \dfrac{1}{20(n+1)}$.

4. Proposer et programmer une méthode pour calculer I_{10}.

1.5.3 Exercice 3.

On souhaite calculer numériquement la dérivée seconde d'une fonction en utilisant la formule suivante

$$f''(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}.$$

1. Tester cette formule pour calculer $\sin''(1)$.

2. Créer un vecteur H contenant les valeurs 10^{-k} pour $k \in \{0, \cdots, 16\}$.

3. Pour tout $h \in \mathbb{R}$, on note

$$e(h) = \left| f''(1) - \frac{f(1+h) - 2f(1) + f(1-h)}{h^2} \right|.$$

   Représenter $e(H)$: pour quelle valeur de h a-t-on la meilleure approximation de $f''(1)$?

4. Donner l'ordre de convergence de cette méthode de calcul d'une dérivée seconde.