· Exercice "Extrema"

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20$$

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

· Pts critiques de f.

$$\nabla f(x) = 0 \iff \begin{cases} 3x^2 - 3 = 0 \\ 3y^2 - 12 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 = 1 \\ y^2 = 4 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ 4 pts critiques $(\pm 1 ; \pm 2) \equiv P_k \quad k = 1 \dots 4$

· Calcul de la Hessienne de f en ces pts critiques

$$H_f(P_k) = \begin{pmatrix} \pm 6 & 0 \\ 0 & \pm 12 \end{pmatrix}$$

Donc f admet :

- 1 min. local ~~en~~ $(+1, +2)$
- 1 max local en $(-1, -2)$
- 2 pts selles en $(-1, +2)$ et $(+1, -2)$.

Exo "Extrema"

$$f(x,y) = x^3 y^2 (1-x-y)$$

- Pts critiques

$\nabla f(x) = 0 \quad (\mathcal{S}_0) \begin{cases} 3x^2y^2(1-x-y) - x^3y^2 = 0 \\ 2x^3 y\ (1-x-y) - x^3y^2 = 0 \end{cases}$

$(\mathcal{S}) \Rightarrow 3y = 2x \iff x = \frac{3}{2} y.$

- Pour $(x \neq 0$ et $y \neq 0)$, $(\mathcal{S}_0) \iff \begin{cases} 3(1-x-y) = x \\ 2(1-x-y) = y \end{cases} : (\mathcal{S}_1)$

Pour $(x+y) \neq 1, (\mathcal{S}_1) \Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{x}{y} : (1)$

$\Rightarrow 1-x-y = 1 - \frac{5}{2} y$

D'où $(\mathcal{S}_1)_b \Rightarrow 2 - 5y = y \iff \underline{y = \frac{1}{3}}$

Et $(1) \Rightarrow \underline{x = \frac{1}{2}}$

f admet dc $P(1/2, 1/3)$ c pt critique.

A noter que :

$\forall y,\ f(0,y)=0$

$\forall x,\ f(x,0)=0$

$\forall (x,y)$ tq $x+y=1,\ f(x,y)=0$.

Et ds ces 3 cas, f admet une infinité de pts critiques.

- Calcul de la Hessienne.
  - Au pt P, on a : $H_f(P)=\begin{pmatrix} -1/9 & -1/12 \\ -1/12 & -1/8 \end{pmatrix}$

    $tr(H_f(P))<0$ et $det(H_f(P))>0$.

    Donc P est un max. local.

  - En $x=0$ et $\forall y\in\mathbb{R}$, $H_f=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
  - En $y=0$ et $\forall x\in\mathbb{R}$, $H_f=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2x^3(1-x) \end{pmatrix}$

Ds ces deux cas, il n'est pas possible de conclure car H_f admet une valeur propre nulle.

Exo Dérivations

$$f :]-\pi, +\pi[\to \mathbb{R} \ , \ f \text{ de classe } \mathcal{C}^1$$

$$g(x,y) = f(\cos x \sin y)$$

$$\partial_x g(x,y) = - f'(\cos x \sin y) \sin x \sin y$$

$$\partial_y g(x,y) = f'(\text{————}) \cos x \cos y$$

D'où : $\nabla g(x,y) = f'(\cos x \sin y)\left(- \sin x \sin y , \cos x \cos y\right)$

Exo Dérivation

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f \text{ de classe } \mathcal{C}^1.$$

$$f : (u,v) \longmapsto f(u,v)$$

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$(x,y) \longmapsto f(y \ln x , xy)$$

On a :

$$\partial_x g(x,y) = \partial_u f(y \ln x, xy) \frac{y}{x}$$

$$+ \partial_v f(y \ln x, xy)\, y$$

Exo Jacobien

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$g(x,y) = \left(\frac{\ln|x|}{1+y^2} , x e^y \right)$$

$$\mathcal{D}_g = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$$

- Jacobienne de g au pt (x,y) :

$$Dg(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{x(1+y^2)} & \frac{-2y \ln|x|}{(1+y^2)^2} \\ e^y & x e^y \end{pmatrix}$$

$$Dg(+1,-1) = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ e^{-1} & e^{-1} \end{pmatrix}$$

D'où : $\mathrm{Jac}_g(+1,-1) = \frac{1}{2e}$.

EKO DL Taylor

$$f(x,y) = x \ln y - \cos x$$

$f : \mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{D}_f$.

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_*^+$.

$$\nabla f(x,y) = \left(\ln y + \sin x \ , \ \frac{x}{y} \right)$$

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \cos x & 1/y \\ 1/y & -x/y^2 \end{pmatrix} \quad \forall (x,y) \in \mathcal{D}_f$$

D'où le DL de Taylor d'ordre 2 au pt $a = (\pi/2, 1)$

$$f(a+h) = f(a) + \langle \nabla f(a), h \rangle + \frac{1}{2} \langle H_f(a)(h), h \rangle + \cdots$$

$$= h_1 + \frac{\pi}{2} h_2 + h_1 h_2 - \frac{\pi}{4} h_2^2 + \underset{a}{o}(h_1^2 + h_2^2)$$

avec $h = (h_1, h_2)$

__NB__ $\nabla f(a) = (1, \pi/2)$ $\quad H_f(a) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\pi/2 \end{pmatrix}$

Exo chg^t de var. & équ diff^{elle}

$\mathcal{U} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x>0 \text{ et } y>0\}$.

$\phi : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^2$

$(x,y) \mapsto (u,v) = \left(\frac{x^2}{y}, y\right)$.

ϕ chg^t de var. (ie ϕ $\mathcal{C}^1$, bijective et d'inverse ϕ^{-1} $\mathcal{C}^1$).

Équ à résoudre :

$(\mathcal{E})$: $\frac{x}{y}\partial_x f(x,y) + \partial_y f(x,y) = \frac{x^4}{y^3}$ $\forall (x,y) \in \mathcal{U}$

On effectue le chg^t de var. :

$f(x,y) = g(u)$, $u = \frac{x^2}{y}$.

$(x,y) \in \mathcal{U} \Rightarrow u \in \mathbb{R}_*^+$

On a : $\begin{cases} \partial_x f(x,y) = \frac{2x}{y} g'(u) \\ \partial_y f(x,y) = \frac{-x^2}{y^2} g'(u) \end{cases}$

On injecte ces express° ds l'équ.

D'où :

$$(E) \iff \frac{x}{y}\,\frac{2x}{y}\,g'(u) - \frac{x^2}{y^2}\,g'(u) = \frac{1}{y}\,u^2$$

$$\iff \frac{x^2}{y}\,g'(u) = u^2 \iff \boxed{g'(u) = u \quad \forall u > 0}$$

On intègre cette eqn. diff^{elle} ordinaire (EDO) du 1er ordre. Cela donne :

$$g(u) = \frac{1}{2}u^2 + h(v) \quad \forall\, h \text{ fct de } v \text{ de classe } \mathcal{C}^2.$$

On obtient alors la forme des sol° de (E) :

$$\boxed{f(x,y) = \frac{x^4}{2y^2} + h(y) \quad \forall (x,y) \in U}$$

et pour tte fct h de classe $\mathcal{C}^2$.