Exo Eqn diff^lle

On cherche à résoudre l'eqn :

$$(\mathcal{E}) : 2xy\, \partial_x f(x,y) + (1+y^2)\, \partial_y f(x,y) = 0$$

ds $\Omega = (\mathbb{R}_*^+)^2$

Chg^t de var. : $x = \frac{1}{2}(u^2+v^2)$; $y = \frac{u}{v}$.

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}_*^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}_*^+ \\ (u,v) & \longmapsto & (x,y) \end{array}$$

__Rem :__ Chg^t de var. inverse ? a-priori pas trivial...

On pose : $\boxed{g(u,v) = f(x,y)}$. On a :

$$\boxed{\begin{aligned} \partial_x f(x,y) &= \partial_u g \cdot \partial_x u + \partial_v g \cdot \partial_x v \\ \partial_y f(x,y) &= \partial_u g \cdot \partial_y u + \partial_v g \cdot \partial_y v. \end{aligned}}$$

Et : $\partial_u x = u$; $\partial_v x = v$

$\partial_u y = \frac{1}{v}$; $\partial_v y = \frac{-u}{v^2}$

D'où : $J_\varphi(u,v) = \begin{pmatrix} u & v \\ \frac{1}{v} & \frac{-u}{v^2} \end{pmatrix}$ et det $J_\varphi = \frac{-u^2}{v^2} - 1$

Et

$$J_{\varphi^{-1}}(x,y) = \left(J_\varphi(u,v)\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \partial_x u & \partial_y u \\ \partial_x v & \partial_y v \end{pmatrix}$$

• Calculons $(J_\varphi)^{-1}$. On a :

$$\left(J_\varphi(u,v)\right)^{-1} = \frac{v^2}{(u^2+v^2)} \begin{pmatrix} +u/v^2 & +v \\ +1/v & -u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & v^3 \\ v & -uv^2 \end{pmatrix} \times \frac{1}{(u^2+v^2)}$$

~~D'où l'équa (*) s'écrit :~~

$$\cancel{2\,\frac{u(u^2+v^2)}{2v}\,\partial_u g(u,v)\cdot\frac{(+u)}{(u^2+v^2)} + \left(\frac{v^2+u^2}{v^2}\right)\partial}$$

On a : $2xy = \frac{u(u^2+v^2)}{v}$, $(1+y^2) = \frac{u^2+v^2}{v^2}$

L'eqn $(*)$ devient :

$$\frac{u}{v}\cancel{(u^2+v^2)}\left[\partial_u g(u,v)\cdot\frac{1}{\cancel{(u^2+v^2)}}\,u\right]+$$

$$+\frac{u}{v}\cancel{(u^2+v^2)}\left[\partial_v g(u,v)\cdot\frac{1}{\cancel{(u^2+v^2)}}\,v\right]$$

$$+\frac{1}{v^2}\cancel{(u^2+v^2)}\left[\partial_u g(u,v)\cdot\frac{1}{\cancel{(u^2+v^2)}}\,v^3\right]$$

$$+\frac{1}{v^2}\cancel{(u^2+v^2)}\left[\partial_v g(u,v)\cdot\frac{(-1)}{\cancel{(u^2+v^2)}}\,uv^2\right]=0$$

$$\Longleftrightarrow\quad \partial_u g\left[\frac{u^2}{v}+v\right]+\cancel{\partial_v g\left[u-u\right]}=0$$

$$\Longleftrightarrow\quad (u^2+v^2)\,\partial_u g(u,v)=0$$

$$\Longleftrightarrow\quad \partial_u g(u,v)=0 \qquad \underline{\forall (u,v)\in U=(\mathbb{R}_*^+)^2}$$

$$\Longleftrightarrow\quad \boxed{g(u,v)=\varphi(v)}\ \forall \text{ fct } \varphi \text{ de classe } \mathcal{C}^1$$

$$\Longleftrightarrow\quad f(x,y)=\varphi(v) \text{ avec } v(x,y)=\,?$$

- Chg^t de var. inverse

$\varphi^{-1} : (x, y) \longmapsto (u, v)$

On a : $2x = u^2 + \frac{1}{y^2} u^2 = u^2\left(1 + \frac{1}{y^2}\right)$

$$\Longleftrightarrow \quad u^2 = \frac{2xy^2}{(1+y^2)}$$

Et : $v^2 = 2x - u^2 = 2x\left(1 - \frac{y^2}{(1+y^2)}\right)$

$$\Rightarrow \quad v^2 = \left(\frac{2x}{1+y^2}\right)$$

La sol$^\circ$ g^{ale} de $(\mathcal{E})$ s'écrit donc :

$$\boxed{f(x,y) = \varphi\left(\sqrt{\frac{2x}{1+y^2}}\right) \quad \forall \varphi \text{ de classe } \mathcal{C}^1}$$

$\forall (x, y) \in \Omega$

Exo — Dérivée directionnelle

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad f(x,y) = \ln\left((x^2+y^2+1)^{1/2}\right)$

f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $(\mathbb{R}_*)^2$

f est symétrique

1. $\partial_x f(x,y) = (x^2+y^2+1)^{-1/2} \dfrac{x}{(x^2+y^2+1)^{1/2}}$

$$\boxed{(\ln u)' = \frac{u'}{u}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\nabla f(x,y) = \frac{1}{(x^2+y^2+1)}(x,y)}$$

2. $\Rightarrow \|\nabla f(x,y)\|_2^2 = \dfrac{(x^2+y^2)}{(x^2+y^2+1)^2}$

Sur $\mathcal{C}(0,r)$, $\quad \|\nabla f\|_2 = \dfrac{r}{(r^2+1)}$ $\quad \forall (x,y) \in \mathcal{C}$

$\mathcal{C} : x^2+y^2 = r^2$ $\quad r = x^2+y^2 > 0$

Hors Quiz

3. $D_v f(x,y) = \langle \nabla f(x,y), v \rangle$

et : $\nabla f(3,4) = \dfrac{1}{26}(3,4)$

Max de la dérivée directionnelle recherchée :

$$\| D_v f(x,y) \| = \|\nabla f\| \underbrace{\|v\|}_{=1}$$

$$\Rightarrow \| D_v f(3,4) \| = \frac{25}{26}$$

Exo Plan tangent.

Sface $\mathcal{C}(x,y,z) = x^2+y^2-z^2=0$: Cône passant par O.

Soit X_0 un pt quelconque du cône.

$X_0 = (x_0, y_0, z_0)$.

- Le vecteur normal au cône en un pt X_0 est :

$$n(X_0) = \left(\partial_x \mathcal{C}(x_0,y_0,z_0), \partial_y \mathcal{C}(-), \partial_z \mathcal{C}(-)\right).$$

soit $n(X_0) = (2x_0, 2y_0, -2z_0) = \underline{2(x_0, y_0, -z_0)}$

- Le plan tgt à $\mathcal{C}$ au pt X_0 est d'éq :

$$2x_0(x-x_0) + 2y_0(y-y_0) - 2z_0(z-z_0) = 0.$$

$$\boxed{x_0 x + y_0 y - z_0 z = C_0}$$

avec $C_0 = (x_0^2 + y_0^2 - z_0^2)$

$\Rightarrow \underline{\underline{C_0 = 0}} \quad \forall X_0 \in \mathcal{C}$.

- Intersect° du cône $\mathcal{C}$ avec le plan vertical $y = ax$, $a \in \mathbb{R}$.

Les pts doivent vérifier le système :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 0 \\ y = ax \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2(1 + a^2) = z^2 \iff \underline{z = \pm (1+a^2)^{1/2} x}$$

soit les pts : $\underline{(1, a, \pm(1+a^2)^{1/2}) \cdot x}$ $\underline{\forall x \in \mathbb{R}}$.

Hors Quiz

(~~Autrement dit les deux "droites"~~ !?
~~correspondantes à ces pts.~~

- Vecteur normal en un pt : $(1, a, \pm(1+a^2)^{1/2})x = P$ est d'express° :

$$n = \nabla f(P) = \left(\partial_x f(P), \partial_y f(P), \partial_z f(P)\right)$$

$$\boxed{n = 2x(1, a, \pm(1+a^2)^{1/2})}$$

Exo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ <u>Extrema locaux / globaux</u>

$f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$

f de classe $\mathcal{C}^1$ ($\hat{u}$ $\mathcal{C}^\infty$) sur $\mathbb{R}^2$. f symétrique

- $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\nabla f(x,y) = 4\,(x^3 - y\,,\ y^3 - x)$$

$$H_f(x,y) = 4 \begin{pmatrix} 3x^2 & -1 \\ -1 & 3y^2 \end{pmatrix}$$

- Pts critiques

$$\nabla f(x,y) = 0 \iff \begin{cases} x^9 = y^3 \\ y^3 = x \end{cases} \Rightarrow \underline{x = \pm 1}\ \text{ou}\ \underline{x = 0}$$

D'où les 3 pts critiques $P_{-1}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $P_0\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $P_{+1}\begin{pmatrix} +1 \\ +1 \end{pmatrix}$

- Hessiennes aux pts critiques,

$$H_f(P_{\pm 1}) = 4\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad ; \quad H_f(0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

trace > 0, det > 0 det < 0.

$\Rightarrow P_{+1}$ min local. $\Rightarrow P_0 = 0$: pt selle.

- Mq $f(x,y) = (x^2-1)^2 + (y^2-1)^2 + 2(x-y)^2 - 2$
- En déduire que les min. locaux trouvés st en fait globaux.

On a :

(1) : $(x^2-1)^2 = x^4 - 2x^2 + 1$

(2) : $(y^2-1)^2 = y^4 - 2y^2 + 1$

(3) : $(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$

(1) + (2) + 2(3) $= x^4 + y^4 - 4xy + 2$. D'où le résultat

On pose : $g(x,y) = f(x,y) + 2$.
$= (x^2-1)^2 + (y^2-1)^2 + 2(x-y)^2$

On a : $g(x,y) \geq 0$ sur $\mathbb{R}^2$.

$g(x,y) = 0 \iff x^2 = 1 = y^2$ et $x = y$.

$\iff x = y = 1$ ou $x = y = -1$

D'où les 2 minimaux locaux
sont en fait des minima globaux.

$\neg$