Exercice : chg^t de var. x résolut^o d'eq^o diff^{elle}

$U = (\mathbb{R}^+_*)^2 \qquad \phi(x,y) = (u,v) = (x, \frac{y}{x})$

$(\mathcal{E}) : \quad x\, \partial_x f(x,y) + 2y\, \partial_y f(x,y) = 1 \quad \forall (x,y) \in U$

chg^t de var. : $g(v) = f(x,y)$

On a :

$$\partial_x f(x,y) = g'(v)\, \partial_x v \qquad \partial_y f(x,y) = g'(v)\, \partial_y v$$

$$= - g'(v) \frac{y}{x^2} \qquad = \frac{1}{x} g'(v)$$

Rem : g est une fct à une seule variable

D'où $(\mathcal{E})$ se ré-écrit :

$$- u g'(v) \frac{v}{u} + 2 u v \frac{1}{u} g'(v) = 1 \quad \left(\forall (u,v) \in U\right.$$

$$\Leftrightarrow \quad g'(v) [- v + 2v] = 1 \quad \forall v > 0$$

$$\Leftrightarrow \quad g'(v) = \frac{1}{v}, \ \forall v > 0 .$$

on intègre et on obtient :

$\boxed{g(v) = \ln|v| + h(u)}$ pour tt h fct de u de classe $\mathcal{C}^1$

Final^t : $\boxed{f(x,y) = \ln\left|\frac{y}{x}\right| + h(x) \quad \forall (x,y) \in U}$

Exo DL Taylor ordre 2.

On note : $X = (x, y)$ $H = (h_x, h_y)$

$A = (1, -2)$.

On a $f(X)$ de classe $\mathcal{C}^2$ (et même $\mathcal{C}^\infty$) en A (et même sur $\mathbb{R}^2$ tout entier).

On peut écrire le DL de Taylor :

$$f(A+H) = f(A) + \langle \nabla f(A), H \rangle + \frac{1}{2}\langle H_f(A) H, H \rangle + \underset{A}{o}(\|H\|^2)$$

On a : $f(A) = -10$;

$$\nabla f(X) = \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2+3 \end{pmatrix} \qquad H_f(X) = \begin{pmatrix} 2y & 2x \\ 2x & 0 \end{pmatrix}$$

D'où

$$\nabla f(A) = \begin{pmatrix} -4 \\ +4 \end{pmatrix} \qquad H_f(A) = \begin{pmatrix} -4 & +2 \\ +2 & 0 \end{pmatrix}$$

Et donc :

$$f(A+H) = -10 - 4(h_x - h_y) + 2h_x(h_y - h_x) + \underset{A}{o}(\|H\|^2).$$