INSA Toulouse, Cycle préparatoire.
Formation continue. Mathématiques. Analyse #2.

Feuille TD

Fonctions de plusieurs variables.
Plans tangents.

Rappel de cours

Le vecteur normal $\mathbf{n}$ à la surface d'équation $f(x,y,z)=0$ au point $\mathbf{x}_0=(x_0,y_0,z_0)$ est le vecteur :

$$\mathbf{n}(\mathbf{x}_0)=\nabla f(\mathbf{x}_0)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0),\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0),\frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\right)$$

Par conséquent tout vecteur $\mathbf{v}$ qui vérifie $<\mathbf{v},\mathbf{n}(\mathbf{x}_0)>=0$ appartient au plan vectoriel tangent à la surface, au point $\mathbf{x}_0$. La réciproque est également vraie.

L'équation du plan tangent à à la surface $f(x,y,z)=0$ au point $\mathbf{x}_0=(x_0,y_0,z_0)$ est alors donnée par l'équation $<(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0),\mathbf{n}(\mathbf{x}_0)>=0$, soit :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+\frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$$

***

Exercice 1 Trouver l'équation du plan tangent pour chaque surface ci-dessous, au point $\mathbf{x}_0=(x_0,y_0,z_0)$ donné :

1. $z=\sqrt{19-x^2-y^2}$; $\mathbf{x}_0=(1,3,3)$.
2. $z=\sin(\pi xy).\exp(2x^2y-1)$; $\mathbf{x}_0=(1,1/2,1)$.

Exercice 2 Un collègue vous affirme que l'équation du plan tangent à la surface d'équation $z=x^4-y^2$ au point $(x_0,y_0,z_0)=(2,3,7)$ est : $z=4x^3(x-2)-2y(y-3)$.

1. Expliquer, sans calcul et très simplement pourquoi cela n'est pas correct.
2. Calculer la bonne équation du plan tangent.

Exercice 3 Soit le paraboloide suivant : $z=4x^2+y^2$. Calculer le plan tangent à ce paraboloide qui est parallèle au plan $x+2y+z=6$.