Exo 2.10 du Cours. Page 16.

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$f(x,y) = (x+y^2, 2x) \qquad g(u,v) = u+v$$

On a : $F(x,y) = g \circ f(x,y) = g(\underbrace{f_1(x,y)}_{=x+y^2}, \underbrace{f_2(x,y)}_{=2x})$

D'où : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$,

- $\partial_x F(x,y) = \partial_u g(x+y^2, 2x) \cdot 1 \leftarrow \dfrac{\partial(x+y^2)}{\partial x}$

$$+ \partial_v g(x+y^2, 2x) \cdot 2 \leftarrow \frac{\partial(2x)}{\partial x}$$

$$= \partial_u g(u,v)\Big|_{\substack{u=x+y^2\\ v=2x}} + 2\,\partial_v g(u,v)\Big|_{\substack{x+y^2\\ 2x}}$$

Et $\begin{cases} \partial_u g(u,v) = 1 \\ \partial_v g(u,v) = 1 \end{cases} \quad \forall (u,v) \in \mathbb{R}^2.$

D'où : $\partial_x F(x,y) = 1.1 + 1.2 = 3 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$

(dc en particulier, $\partial_x F(a_1, a_2) = 3$).

- $\partial_y F(x,y) = \partial_u g(u,v)\Big|_{\substack{u=x+y^2\\ v=2x}} \cdot \underbrace{\left(\dfrac{\partial(x+y^2)}{\partial y}\right)}_{=2y}$

$$+ \partial_v g(u,v)\Big|_{\substack{u=x+y^2\\ v=2x}} \cdot \underbrace{\left(\frac{\partial(2x)}{\partial y}\right)}_{=0}$$

Donc : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\partial_y F(x,y) = 1 \cdot 2y + 1 \cdot 0$$
$$= 2y$$

soit $\partial_y F(a_1, a_2) = 2a_2$.

Exo 2.11.

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$f(x,y) = yx^3 - \frac{1}{y}$.

f est de classe $\mathcal{C}^2$ (et même $\mathcal{C}^\infty$) sur l'ensemble

$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y \neq 0\}$.

- Calculons les dérivées partielles 2nd "croisées" de f sur Ω.

$\partial_x f(x,y) = 3yx^2$; $\partial_y f(x,y) = x^3 + \frac{1}{y^2}$

$\partial_y(\partial_x f(x,y)) = 3x^2$; $\partial_x(\partial_y f(x,y)) = 3x^2$

On a bien, comme le stipule le th. de Schwarz

$$\partial_y(\partial_x f(x,y)) = \partial_x(\partial_y f(x,y)) = \partial^2_{xy} f(x,y).$$

Exo 2.13.

a) Déjà écrit en cours. Posons $X = (x_1, x_2)$, $H = (h_1, h_2)$.

$$f(X+H) = f(X) + \langle \nabla f(X), H\rangle + \frac{1}{2}\langle H_f(X)H, H\rangle + \underset{0}{o}(\|H\|^2).$$

soit $$f(X+H) = f(X) + \sum_{i=1}^{2} \partial_i f(X) h_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} \partial^2_{ij} f(X) h_i h_j + \underset{0}{o}(\|H\|^2)$$

b) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x + 1$

Remarquons que f est la somme d'une forme quadratique et d'une forme linéaire.
Les dérivées 2nd seront des constantes.

$\partial_x f(x,y) = 2x - 2$; $\partial_y f(x,y) = 2y$

$\partial^2_{xx} f(x,y) = 2$; $\partial^2_{yy} f(x,y) = 2$; $\partial^2_{xy} f(x,y) = 0$

D'où le DL de Taylor ordre 2 au pt $(x,y) = X$:
$\forall H = (h_x, h_y)$,

$$f(X+H) = f(X) + h_x(2x-2) + 2h_y y + h_x^2 + h_y^2 + \cancel{0 . h_x h_y} + o(\|H\|^2).$$

Prop. 2.5 a) $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $\mathcal{C}^1$

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^1$

On a : $\boxed{\mathrm{div}(uf) = u \nabla f + f \,\mathrm{div}(u).}$

Démo: $\mathrm{div}(u f) = \mathrm{div}(f u_1, \dots, f u_n)$

$$= \partial_1 (f u_1) + \dots + \partial_n (f u_n)$$

$$= \left(\partial_1 f \, u_1 + \dots + \partial_n f \, u_n\right) + f \partial_1 u_1 + \dots + f \partial_n u_n$$

$$= \underbrace{\nabla f \cdot u}_{= u \cdot \nabla f} + f \,\mathrm{div}\, u$$

b) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^2$. On a :

$\boxed{\mathrm{div}(\nabla f) = \Delta f}$

Démo. $\nabla f = (\partial_1 f, \dots, \partial_n f) \in \mathbb{R}^n$. ~~Et~~

$$\mathrm{div}(\nabla f) = \partial_1(\partial_1 f) + \dots + \partial_n(\partial_n f)$$

$$= \partial^2_{11} f + \dots + \partial^2_{nn} f = \Delta f.$$