Exo 1.

$$u(x) = (\ln x)^2 + x + x e^{x/2}$$

Equiv. en 0^+.

On a : $\dfrac{u(x)}{(\ln x)^2} = 1 + \dfrac{x(1+e^{x/2})}{(\ln x)^2}$; $x > 0$

$$\Rightarrow \quad \frac{u(x)}{(\ln x)^2} \underset{0^+}{\sim} 1$$

$$\Rightarrow \quad \underline{u(x) \underset{0^+}{\sim} (\ln x)^2}$$

Autre sol° : $u(x) - (\ln x)^2 = \underbrace{x(1+e^{x/2})}_{\xrightarrow[x \to 0^+]{} 0} = o(\ln x$

$$\Rightarrow \quad \underline{u(x) \underset{0^+}{\sim} (\ln x)^2}$$

Equiv. en $+\infty$.

On écrit de u :

$$\frac{u(x)}{x e^{x/2}} = \frac{(\ln x)^2}{x e^{x/2}} + \frac{1}{e^{x/2}} + 1 \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$$

D'où $\quad \underline{u(x) \underset{+\infty}{\sim} x e^{x/2}}$

Exo 1 D.L. avec paramètres

$$f(x) = \cos x - \frac{1+ax^2}{1+bx^2}$$

a) On a :

ENO : $\cos x \underset{0}{=} \cancel{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + o(x^7)$

Aussi : $\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 + \dots + \underset{u\to 0}{o}(u^n)$

Avec $u = bx^2 \underset{0}{\to} 0$, $\frac{1}{1+bx^2} = \cancel{1} - bx^2 + b^2x^4 - b^3x^6 + o(x^{2n})$

$$\Rightarrow \frac{ax^2}{1+bx^2} = ax^2 - abx^4 + ab^2x^6 - ab^3x^{10} + \dots + o(x^{2n})$$

D'où (a,b) doit être tel que :

Sys. 2 équs à 2 inconnues
$$\begin{cases} -\frac{1}{2} + b - a = 0 & (\text{ordre } 2) \quad :(1) \\ \frac{1}{4!} - b^2 + ab = 0 & (\text{ordre } 4) \quad :(2) \end{cases}$$

$(1) \Rightarrow a = b - \frac{1}{2}$. Et $(2) \Rightarrow \frac{1}{24} - \cancel{b^2} + b(\cancel{b} - \frac{1}{2}) = 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{24} = \frac{1}{2}b \Rightarrow \boxed{b = \frac{1}{12}\,.\ a = \frac{-5}{12}}$$

Vérifions le terme d'ordre 6. On a :

$$-\frac{1}{6!} + a b^2 = \frac{-1}{30 \times 24} - \frac{5}{12} \times \frac{1}{12^2}$$

$$\neq 0$$

Conclusion. Pour que f soit, au voisinage de 0, un infiniment petit d'ordre le plus élevé, il faut : $a = \frac{-5}{12}$; $b = \frac{1}{12}$

Et dans ce cas, $\quad f(x) \underset{0}{\sim} \left(\frac{-1}{6!} - \frac{5}{12^3} \right) x^6$

INSA Toulouse, Cycle préparatoire.
Mathématiques : Analyse 1

Exercice 1 DL Ecrire un développement limité à l'ordre p et au point indiqué des fonctions suivantes :

-) Ordre 5, en 0, $f(x) = \ln(1+x)(\sinh x - \sin x)$.

Correction :

-) Ordre 5, en 0, $f(x) = \ln(1+x)(\sinh x - \sin x)$.

Ce DL existe puisque f est de classe C^∞ sur $]-1,+\infty[$ donc a-fortriori en 0.

On a : $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$. *Donc lorsque l'on fera le produit des deux DL (cf expression de f), tous les termes du DL de* $(\operatorname{sh} x - \sin x)$ *seront multipliés par x.*

Pour obtenir un DL_5 de f en 0, il faut et suffit de considérer un DL_4 de $(\sinh x - \sin x)$.

On a :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right), \quad \operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right),$$

Donc :

$$\sinh x - \sin x = \frac{x^3}{3} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^3}{3}$$

Ainsi, il suffit pour obtenir un DL_5 de f en 0 de partir d'un DL_2 de $\ln(1+x)$.

On a : $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)$.

On a donc :

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(x - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)\right)\left(\frac{x^3}{3} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right)\right) \\ &= \frac{x^4}{3} - \frac{x^5}{6} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^5\right) \end{aligned}$$

Exo Branches infinies

a) $f(t) = \frac{1}{t}(t^2 - 2t - 1)e^{1/t}$.

On pose : $x = \frac{1}{t}$. On a :

$$f(t) = g(x) = x\left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} - 1\right) \cdot e^x = \left(\frac{1}{x} - 2 - x\right)e^x$$

On a : $g(x) \xrightarrow[x \to 0]{} +\infty$. (On écrit un dévelop^t asymptotique de $g(x)$ en 0 à la précis^o x.)

On a : $$g(x) = e^x \cdot \frac{1}{x}(1 - 2x - x^2)$$

et : $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$

d'où : $$g(x) = \left[\frac{1}{x} + 1 + \frac{1}{2}x + o(x)\right] \cdot (1 - 2x - x^2)$$

$$\Rightarrow g(x) = \left(\frac{1}{x} + 1 + \frac{1}{2}x\right) + (-2 - 2x) - x + o(x)$$

$$\Rightarrow g(x) = -\frac{5}{2}x - 1 + \frac{1}{x} + o(x)$$

d'où $$f(t) = -1 + t - \frac{5}{2}\frac{1}{t} + o\left(\frac{1}{t}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{f(t) - [1 - t] = -\frac{5}{2}\frac{1}{t} + o\left(\frac{1}{t}\right)}$$

d'où $f(t) - \Delta(t) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{5}{2}\frac{1}{t} \to 0 \Rightarrow$ $\Delta(t)$: d^te asymptote en $+\infty$ et $\mathcal{C}_f$ au-dessous de Δ.

Exo — Développt asymptotique, en 0, à la précis° x^2.

$$f(x) = \frac{1}{x(e^x-1)} - \frac{1}{x^2}$$

$$e^x - 1 \underset{0}{\sim} x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + \underset{0}{o}(x^5)$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2}\cdot\left[\frac{1}{1+\underbrace{\frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{24}x^3 + \frac{1}{120}x^4 + o(x^4)}_{=u \xrightarrow[x\to 0]{} 0}} - 1\right]$$

$$\frac{1}{1+u} - 1 = -u + u^2 - u^3 + u^4 + \underset{0}{o}(u^4)$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2}\left(-u + u^2 - u^3 + u^4 + o(u^4)\right).$$

$$= \frac{1}{x^2}\left[-\frac{x}{2} + x^2\left(\frac{-1}{6} + \frac{1}{4}\right) + x^3\left(\frac{-1}{24} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + x^4\left(\frac{-1}{120} + \frac{1}{36} + \frac{1}{24} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16}\right) + o(x^4)\right]$$

$$= -\frac{1}{2x} + \frac{1}{12} - \frac{x^2}{720} + \underset{0}{o}(x^2)$$

Exo Branches infinies

a) $f(t) = \frac{1}{t}\left(t^2 - 2t - 1\right)e^{1/t}$.

On pose : $x = \frac{1}{t}$. On a :

$$f(t) = g(x) = x\left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} - 1\right)\cdot e^x = \left(\frac{1}{x} - 2 - x\right)e^x$$

On a : $g(x) \xrightarrow[x \to 0]{} +\infty$. (On écrit un dévellop^t asymptotique de $g(x)$ en 0 à la précision x.)

On a : $$g(x) = e^x \cdot \frac{1}{x}\left(1 - 2x - x^2\right)$$

et : $$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$

d'où : $$g(x) = \left[\frac{1}{x} + 1 + \frac{1}{2}x + o(x)\right] \cdot \left(1 - 2x - x^2\right)$$

$$\Rightarrow g(x) = \left(\frac{1}{x} + 1 + \frac{1}{2}x\right) + \left(-2 - 2x\right) - x + o(x)$$

$$\Rightarrow g(x) = -\frac{5}{2}x - 1 + \frac{1}{x} + o(x)$$

d'où $$f(t) = -1 + t - \frac{5}{2}\frac{1}{t} + o\left(\frac{1}{t}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{f(t) - [1 - t] = -\frac{5}{2}\frac{1}{t} + o\left(\frac{1}{t}\right)}$$

D'où $f(t) - \Delta(t) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{5}{2}\frac{1}{t} \to 0 \Rightarrow$ $\Delta(t)$: d^{te} asymptote en $+\infty$ et $\mathcal{C}_f$ au-dessous de Δ.

②

b) $f(t) = (1+t)\arctan\left(1+\frac{2}{t}\right)$

On a : $\lim_{+\infty} \arctan\left(1+\frac{2}{t}\right) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$

d'où $f(t) \xrightarrow[+\infty]{} +\infty$

Chgt de var. : $x = \frac{1}{t}$. ($x \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0^+$).

On écrit un dévelop^t asymptotique de $g(x)$ en 0 et à la précis° x (a-priori...)
$(g(x) = f(t))$

On a : $g(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)\arctan(1+2x)$

$= \frac{1}{x}\arctan(1+2x) \cdot (x+1)$

- D.L. de $\arctan(1+2x)$ en 0 à l'ordre 3 :

$\arctan(1+2x) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(2x) - \frac{1}{4}(2x)^2 + \frac{1}{12}(2x)^3 + o(x^3)$

D'où : $g(x) = \left(\frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{x} + 1 - x + \frac{8}{12}x^2\right)(x+1) + o(x^2)$

$\Rightarrow g(x) = \left(\frac{\pi}{4}+1\right) - \frac{1}{3}x^2 + \frac{\pi}{4}\frac{1}{x} + o(x^2)$

Soit :

$$f(t) = \left(1 + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{4} t - \frac{1}{3}\frac{1}{t^2} + o\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

D'où

$$f(t) - \Delta(t) = -\frac{1}{3}\frac{1}{t^2} + o\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

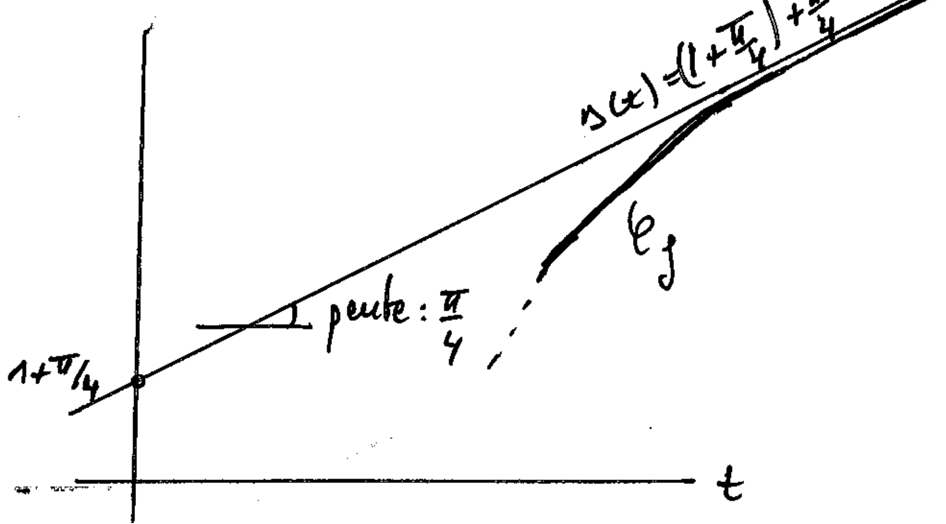
avec $\Delta(t) = \left(1 + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{4} t$

On a donc :

$$\boxed{f(t) - \Delta(t) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{3}\frac{1}{t^2} \xrightarrow[+\infty]{} 0}$$

$\Delta(t)$: d^te asymptote de f en $+\infty$

Et le graphe de f, noté $\mathcal{C}_f$, est au-dessous de cette d^te en $+\infty$ (car $-\frac{1}{3}\frac{1}{t^2} < 0$ au voisi. de $+\infty$)



Exo 5 Calcul d'intégrales.

①

a) $I_n = \int_0^\pi \underbrace{e^x}_{u'} \underbrace{\cos(nx)}_{v}\, dx \quad n \in \mathbb{Z}.$

I.P.P :

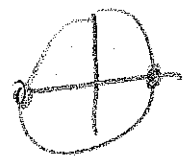
$$I_n = \left[e^x \cos(nx)\right]_0^\pi + n \overbrace{\int_0^\pi \underbrace{e^x}_{u'} \underbrace{\sin(nx)}_{v}\, dx}^{=\left[e^x \sin(nx)\right]_0^\pi - n\int e^x \cos(nx)}$$

$$= -1 + \cancel{n\underbrace{\left[e^x \sin(nx)\right]_0^\pi}_{=0}} - n^2 \underbrace{\int_0^\pi e^x \cos(nx)\, dx}_{I_n}$$

d'où $I_n = -1 + e^\pi (-1)^n - n^2 I_n.$

$$\Rightarrow I_n (1+n^2) = -1 + (-1)^n e^\pi$$

$$\Rightarrow I_n = \frac{-1 + (-1)^n e^\pi}{1+n^2}$$



b) $I = \int_0^1 \frac{1}{e^x + 2e^{-x}}\, dx = \int_0^1 \frac{e^x\, dx}{e^{2x}+2}$

chg^t var. : $y = e^x$ $\Rightarrow I = \int_1^e \frac{dy}{y^2+2} = \frac{1}{2} \int \frac{dy}{\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1}$

$dy = e^x\, dx$

chg^t var. $z = \frac{y}{\sqrt{2}} \Rightarrow dz\,\sqrt{2} = dy$

$$I = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{1/\sqrt{2}}^{e/\sqrt{2}} \frac{1}{z^2+1}\, dz = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\arctan(z)\right]_{1/\sqrt{2}}^{e/\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\arctan\left(\frac{e}{\sqrt{2}}\right) - \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]$$

Exo — CV d'intégrales

a) $$\int_0^1 \underbrace{\frac{1}{[t(1-t)]^{1/2}}}_{=f(t)} dt = I$$

On a : $f(t) \xrightarrow[x \to 0^+]{} +\infty$ et $f(t) \xrightarrow[x \to 1^-]{} +\infty$

- Etude de $I_1 = \int_0^a f(t)\,dt$; $a \in]0,1[$.

↳ étude en 0.

On a : $f(t) \underset{0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}$; et $\int_0^a \frac{1}{\sqrt{t}} dt$ converge

d'où I_1 est convergente.

- Etude de $I_2 = \int_a^1 f(t)\,dt$.

On a : $f(t) \underset{1}{\sim} \frac{1}{\sqrt{1-t}}$

Par chgt de var. $u = 1-t \xrightarrow[t \to 1^-]{} 0^+$,

$f(t) \underset{0}{\sim} g(u) = \frac{1}{\sqrt{u}}$, et $\int_0^a \frac{1}{\sqrt{u}} du$ convergente.

d'où I_2 convergente. Et finalt $\underline{I \text{ convergente}}$