Exo Etude de convergence éventuelle d'intégrales

a) $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha \ln(x)}\, dx$ avec $a > e$.

cf Corrigé qui suit

b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \underbrace{\frac{t^\alpha}{(1+t^2)^2}}_{=f(t)}\, dt$, $\alpha \geq 0$.

L'intégrande $f(t)$ est C^0 en 0 et $\hat{a}$ pour tout $t \in [0; +\infty[$. f est positive sur $\mathbb{R}^+$.

En $+\infty$? On a : $f(t) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{t^\alpha}{t^4} = t^{\alpha-4}$

Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{4-\alpha}}\, dt$ est cv ssi $4-\alpha > 1$

i.e. $\alpha < 3$

En vertu du th. de comparaison,

I est convergente ssi $\alpha < 3$ (avec $\alpha \geq 0$)

$$I = \int_a^{+\infty} \overbrace{\frac{1}{x^\alpha \ln x}}^{=f(x)} dx \quad ; \; a > e.$$

I existe-elle, converge-t-elle ? (selon les valeurs de α, $\alpha \in \mathbb{R}$).

Tt d'abord, notons que:

$\underline{\underline{f(x) > 0}}$ sur $[a ; +\infty[$

f ctnue sur $[a ; +\infty[$.

La question porte en $+\infty$.

<u>Cas $\alpha < 0$</u> $\quad f(x) \underset{+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ dc I diverge

<u>Cas $\alpha \geq 0$</u> $\quad$ Pour $x \geq e$, $x^\alpha \ln x > x^\alpha$

Donc $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha \ln x} dx < \underbrace{\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx}_{\text{Int. de Riemann CV pour } \alpha > 1}$

Dc I est CV pour $\underline{\alpha > 1}$.

<u>Cas $0 \leq \alpha \leq 1$</u> ?

Pour $\underline{\underline{\alpha = 1}}$, on a $I = \displaystyle\int_{\ln(a)}^{+\infty} \frac{1}{y} dy$: $\underline{\underline{DV}}$

par chg^t de var $y = \ln x$

$dy = \frac{1}{x} dx$

Pour $\cancel{0} \leq \alpha < 1$?

Pour $x \geq e > 1$, on a : $x^{\alpha} < x$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^{\alpha}} > \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \int_a^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha} \ln x} dx > \underbrace{\int_a^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} dx}_{DV}.$$

En conclusion, l'intégrale est convergente pour $\alpha > 1$, et divergente sinon.
$(\alpha \in \mathbb{R})$

Exo Int. généralisée

$$I = \int_0^{+\infty} \underbrace{\left((x+2) - \sqrt{x^2+4x+1}\right)}_{= f(x)} dx$$

$f(x)$ ctnue sur $[0;+\infty[\Rightarrow \int_0^M f(x)\,dx$ CV

pour tt $M>0$.

Etude en $+\infty$.

$$f(x) = \underbrace{(x+2)}_{a} - \underbrace{(x^2+4x+1)^{1/2}}_{b}$$

$$= \frac{(x+2)^2 - (x^2+4x+1)}{(x+2) + (x^2+4x+1)^{1/2}}$$

$$= \frac{3}{(x+2) + (x^2+4x+1)^{1/2}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{3}{2x}$$

Rem : $f(x)$ positive sur $\mathbb{R}_*^+$

Et $\frac{3}{2}\frac{1}{x}$ non intégrable sur $+\infty$

En vertu th de comparaison fcts positives,

I est divergente.

Exo Etudier la cv éventuelle de :

a) $\int_0^1 \frac{1-e^{-x}}{x\sqrt{x}}\,dx$

$f(x) = \frac{1-e^{-x}}{x\sqrt{x}}$ ctnue sur $]0,1]$.

Par contre $\lim_{x\to 0^+} f(x) = ?$ indéterminé. D'où int. généralisée a-priori. possible?!

• Rem: On a : $f(x) > 0 \quad \forall x \in]0,1] \Rightarrow$ Th. de comparaison applicable.

• Etudions le compt de f au vois. de 0^+.

On a : $e^{-x} = 1 - x + x^2/2 + o(x^2)$

$\Rightarrow 1 - e^{-x} \underset{0}{=} x - \cancel{\frac{x^2}{2}} + o(x)$

D'où : $f(x) = \frac{x - \cancel{\frac{1}{2}x^2} + o(x)}{x\sqrt{x}} \underset{0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{x}}$

Et $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$: Int. de Riemann convergente

$\left(= \frac{1}{2}[\sqrt{x}]_0^1 \right)$

$\Rightarrow \int_0^1 f(x)\,dx$ et $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ de $\hat{u}$ nature i.e. cv.

$f(x) > 0$ (Th. de comparaison) $\longrightarrow$

Exo

a) $n > 0$ $\quad I_n = \int_1^n \frac{\ln(1+x)}{x\sqrt{x}}\,dx$

IPP. $u = \ln(1+x) \Rightarrow u' = \frac{1}{1+x}$

$v' = \frac{1}{x\sqrt{x}} = x^{-3/2} \Rightarrow v = -2\,x^{-1/2} = \frac{-2}{\sqrt{x}}$

D'où $I_n = \left[\frac{-2}{\sqrt{x}}\ln(1+x)\right]_1^n + 2\int_1^n \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}\,dx$

D'où le résultat.

b) $I = \lim_{n \to +\infty} I_n$.

On a ; $\frac{\ln(1+n)}{\sqrt{n}} \xrightarrow[+\infty]{} 0$

Et $\frac{1}{(1+x)\sqrt{x}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x^{3/2}}$. En vertu du th. de comparaison int. de fcts positives,

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}\,dx$ est cv (car l'int. de Riemann $\int_1^{+\infty} x^{-3/2}\,dx$ est elle-même cv.

c) Valeur de I.

Calculons $\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}\, dx = J$

chg^t de var. $u = \sqrt{x} \Rightarrow du = \frac{1}{2\sqrt{x}}\, dx$

$\Rightarrow dx = 2u\, du$

D'où : $J = \int_1^{+\infty} \frac{2}{(1+u^2)}\, du = 2\left[\arctan u\right]_1^{+\infty}$

$= 2\left(\pi/2 - \pi/4\right) = \underline{\pi/2}$