

INSA Toulouse, cycle préparatoire

Analyse 1 - Feuille TD #4

Intégrales généralisées

Exercice 1 Intégrale convergente ou pas ?

Etudier la convergence éventuelle des intégrales suivantes.

1)

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha \ln(x)} dx, \text{ avec } a > e$$

Discuter selon les valeurs de α . (*Correction dans polycopié de cours*).

2)

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(1+t^2)^2} dt$$

avec $\alpha \geq 0$. Discuter selon les valeurs de α .

3)

$$\int_0^{+\infty} [x + 2 - \sqrt{x^2 + 4x + 1}] dx$$

Indice : Vous utiliserez à bon escient la propriété : $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.

4)

$$\int_0^1 \frac{1 - e^{-x}}{x\sqrt{x}} dx$$

Exercice 2

a) Soient $M > 0$, $I_M = \int_1^M \frac{\ln(1+x)}{x\sqrt{x}} dx$ et $I = I_{(M=+\infty)}$.

Montrer que :

$$I_M = -2 \frac{\ln(1+M)}{\sqrt{M}} + 2 \ln(2) + 2 \int_1^M \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}} dx$$

b) En déduire que I existe i.e. qu'il s'agit d'une intégrale convergente.
Donner sa valeur.