Calcul d'intégrales simples

a) $I=\int_{-1}^{+1} \underbrace{x\,(1+x^2)^{1/2}}_{f(x)}\,dx$

- L'intervalle d'intégration est centré par rapport à 0
- L'intégrande $f(x)$ est-elle alors paire ou impaire ?

oui, $f(x)$ est impaire. D'où : $I = 0$!

Rem. Sinon l'intégrale peut aussi se calculer en effectuant le chgt de var. $u(x) = (1+x^2)$.

b) $\int_1^e \ln x\,dx$: archi classique. IPP

$v = \ln x \qquad v' = \frac{1}{x}$

$u' = 1 \qquad u = x$

$I = [x \ln x]_1^e - \int_1^e 1\,dx = e - [e-1] = +1$

c) $\int_1^e (\ln x)^2\,dx$: semblable, IPP

$v = (\ln x)^2 \qquad v' = 2 \ln x \cdot \frac{1}{x}$

$u' = 1 \qquad u = x$

$I = \left[x(\ln x)^2\right]_1^e - 2\underbrace{\int_1^e \ln x\,dx}_{\text{déjà vu}} = e - 2$

Intégrales simples

d) $\int_0^{\pi/4} \tan^2 dx$ Rappel : $\tan' x = 1 + \tan^2 x$

$\frac{\sin}{\cos}' = \frac{\cos^2+\sin^2}{\cos^2} = 1 + \tan^2$

Astuce : $I = \int_0^{\pi/4} (\tan^2 x + 1)\, dx - \int_0^{\pi/4} 1\, dx$

$= [\tan x]_0^{\pi/4} - [x]_0^{\pi/4} = 1 - \pi/4$

e) $\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{1+x}}\, dx$. Tentons : $t = (1+x)^{1/2}$

$dt = \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2} dx$

$= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1+x}} dx$

On a : $t^2 - 1 = x$

$I = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} 2(t^2-1)\, dt$

$= 2 \left[\frac{1}{3}t^3 - t\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}}$

$= 2\left(\cancel{\frac{1}{3} 3^{3/2}} - \cancel{\sqrt{3}} - \frac{1}{3} 2^{3/2} + \sqrt{2}\right)$

$= -\frac{2^{5/2}}{3} + 2^{3/2}$

$= -2^{3/2}\left(\frac{4}{3} + 1\right) = -\frac{7}{3}\sqrt{8}$

Note le chgt var. $x = \sin^2 t$ est ok ... mais plus compliqué

Autre Sol°

IPP avec $\left[(1+x)^{1/2}\right]' = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1+x}}$

f) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{(e^x+1)^{1/2}}\,dx$

Tentons le chgt de var : $u = e^x \Rightarrow du = e^x\,dx$

$$I = \int_1^e \frac{du}{(u+1)^{1/2}} = 2\left[(u+1)^{1/2}\right]_1^e$$

$$= 2\left(\sqrt{e+1} - \sqrt{2}\right)$$

c) $\displaystyle\int_{1/2}^{1} \frac{(1-x^2)^{1/2}}{x^2}\,dx$

Tentons le chgt de var : $x = \cos t \Rightarrow dx = -\sin t\, dt$

Nb. On aurait pu aussi intenter le chgt de var. $x = \sin t$ ..?...

$$I = \int_{\arccos(1/2)}^{\arccos(1)} \frac{|\sin t|}{\cos^2 t}(-\sin t)\,dt$$

or $\arccos(1/2) = \frac{\pi}{3}$ et $\arccos(1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t \in [0, \frac{\pi}{3}] \text{ et} \\ \sin t \geq 0 \end{cases}$

d'où $$I = \int_0^{\pi/3} \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}\,dt = \int_0^{\pi/3} \tan^2 t\,dt$$

$$= \int_0^{\pi/3} (1 + \tan^2 t)\,dt - \int_0^{\pi/3} 1\,dt$$

astuce

$$= [\tan t]_0^{\pi/3} - \pi/3 = \tan(\pi/3) - \pi/3 = \sqrt{3} - \pi/3$$

Exercice 5.

1) $I + J = \int_a^b \frac{\sin x + \cos x}{\sin x + \cos x} \, dx = \int_a^b 1 \, dx = b - a.$

2) $I - J = \int_a^b \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} \, dx.$

On pose $t = \sin x + \cos x$

$dt = (\cos x - \sin x) \, dx$

On a donc $I - J = -\int_{\sin a + \cos a}^{\sin b + \cos b} \frac{dt}{t}.$

3) On en déduit $I - J = -\left[\ln|t|\right]_{\sin a + \cos a}^{\sin b + \cos b}$

$$I - J = \ln\left|\frac{\sin a + \cos a}{\sin b + \cos b}\right|$$

et $I = \frac{1}{2}(I + J) + \frac{1}{2}(I - J)$

$$I = \frac{b-a}{2} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin a + \cos a}{\sin b + \cos b}\right|$$

puis $J = \frac{1}{2}(I + J) - \frac{1}{2}(I - J)$

$$J = \frac{b-a}{2} - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin a + \cos a}{\sin b + \cos b}\right|.$$

Exo Intégration

a) $I = \int \frac{1}{x \ln x}\, dx$ Chgt de var : $u = \ln x$

$\Rightarrow du = \frac{1}{x} dx$

$= \int \frac{1}{u}\, du = \ln |u| + c$

$= \ln |\ln x| + c, \ \forall c \in \mathbb{R}.$

$\mathcal{D}_I =]0, 1[\cup]1 ; +\infty[$

b) $I = \int_{1/2}^{2} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \arctan x \, dx$

$u = \frac{1}{x} \Rightarrow du = \frac{-1}{x^2} dx \Rightarrow dx = \frac{-du}{u^2}$

$I = -\int_{2}^{1/2} (1+u^2) \arctan\left(\frac{1}{u}\right) \frac{1}{u^2}\, du$

$= \int_{1/2}^{2} \left(1 + \frac{1}{u^2}\right)\left(\frac{\pi}{2} - \arctan(u)\right) du$

$= \frac{\pi}{2} \int_{1/2}^{2} \left(1 + \frac{1}{u^2}\right) du - \underbrace{\int_{1/2}^{2} \left(1 + \frac{1}{u^2}\right) \arctan u \, du}_{= I}$

D'où $2I = \frac{\pi}{2} \int_{1/2}^{2} (1 + u^{-2})\, du = \frac{\pi}{2}\left[u - \frac{1}{u}\right]_{1/2}^{2}$

$\Rightarrow \boxed{I = \frac{3\pi}{4}}$

Exo Calcul de primitives

a) $\displaystyle\int \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx$ On pose : $x = \tan t$
(soit $t = \arctan x$)

d'où : $dx = (1+\tan^2 t)\,dt = (1+x^2)\,dt$

$$\Rightarrow \frac{dx}{(1+x^2)} = dt$$

D'où $\displaystyle I = \int \frac{dt}{1+\tan^2 t} = \int \frac{\cos^2 t}{\cos^2 t + \sin^2 t}\,dt$

$\displaystyle \Rightarrow I = \int \cos^2 t\,dt$: Integrale classique du type $\int \cos^n t\,dt$ ou $\int \sin^n t\,dt$: IPP

~~On pose~~ $\cancel{\begin{cases} u' = \cos t \\ v = \cos t \end{cases}} \Rightarrow \cancel{\begin{cases} u = \sin t \\ v' = -\sin t \end{cases}}$ Intéressant pour $n \geqslant 3$.

On a : $\cos^2 t = \frac{1}{2}(1 + \cos 2t)$

soit $\displaystyle I = \frac{1}{2}t + c + \frac{1}{2}\int \cos 2t\,dt$, $c \in \mathbb{R}$.

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Cette primitive est bien définie pour tout $t \in \mathbb{R}$

b) $\displaystyle \int \underbrace{\frac{x+2}{x^2-3x-4}}_{\text{Fract° rationnelle } F(x)} dx$

Décomposit° en élé-ts simples :

$$F(x) = \frac{x+2}{(x+1)(x-4)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-4}$$

$$G(x) = (x+1)\,F(x)\Big|_{x=-1} = a = \frac{-1}{5}$$

$$(x-4)\,F(x)\Big|_{x=4} = b = \frac{6}{5}$$

D'où :

$$I = -\frac{1}{5}\int \frac{1}{x+1}\,dx + \frac{6}{5}\int \frac{1}{x-4}\,dx$$

$$I = -\frac{1}{5}\ln|x+1| + \frac{6}{5}\ln|x-4| + c$$

La primitive existe (est bien définie) pour $x \in \mathbb{R}$
$x \neq -1$
$x \neq 4$

c) $\displaystyle\int \underbrace{\frac{3x+1}{(x+1)^2}}_{\text{Fract° rationnelle}} dx$

Décomposition en élé^{ts} simples :

$$F(x) = \frac{3x+1}{(x+1)^2} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{(x+1)^2}$$

$$(x+1)^2 F(x) \Big|_{x=-1} = \underline{b = -2}$$

$$\lim_{+\infty} (x F(x)) = \underline{3 = a}$$

D'où $\displaystyle I = 3\int \frac{1}{x+1} dx - 2 \int \frac{1}{(x+1)^2} dx$ $\quad \left(-\frac{1}{u}\right)' = \frac{u'}{u^2}$

$$= 3 \ln|x+1| + c - 2 \left[-\frac{1}{(x+1)} \right]$$

$$\underline{c \in \mathbb{R}}$$

$$\Rightarrow \underline{I = 3 \ln|x+1| + c + \frac{2}{(x+1)}}$$

Primitive bien définie pour $x \in \mathbb{R}$, $x \neq -1$

Exo. Calcul de primitives ou intégrales

Plus difficile

a) $I = \int \frac{1}{\sin x}\, dx$.

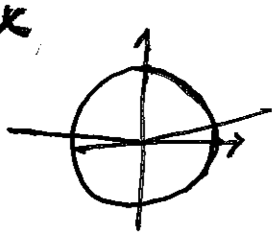
Rem : $f(x) = \frac{1}{\sin x}$ est définie pour $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

I bien définie sur les intervalles $]k\pi, (k+1)\pi[$

L'intégrande est une fract° rat$^{\text{elle}}$ en poly. trigonométrique sin / cos. $\rightarrow$ Règle de Bioche.

A défaut, tester les différents ch$^{\text{gts}}$ de var : $\sin x$, $\cos x$ ou $\tan\frac{x}{2}$, $\tan x$

- $f(x)dx = \frac{dx}{\sin x}$ est invariant par le ch$^{\text{gt}}$ de var. $x \mapsto -x$



$\Leftrightarrow$ ch$^{\text{gt}}$ de var. $t = \cos x$

$$\Rightarrow dt = -\sin x . dx$$

On a :

$$I = \int \frac{-\sin x\, dx}{-\sin^2 x} = \int \frac{dt}{-1+t^2}$$

démo. :
1- découp. en élém$^{\text{ts}}$ simples
2- Intégrat°

$$\underset{\text{cf Table ds le cours}}{=} \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + cste$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\cos x - 1}{\cos x + 1} \right| + cste$$

b) $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{\sin^2 t + 4 \sin t + 4} \, dt$

L'intégrande est une fract° rationnelle en sinus, cosinus

→ Règle de Bioche (cf cours)

L'intégrande $f(t)$ est invariante par le chgt de var.

$t \mapsto (\pi - t)$ i.e. $f(\pi - t) = f(t)$.

On effectue alors le chgt de var. $x = \sin t$

$\Rightarrow dx = \cos t \, dt$

Et, $I = \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 4x + 4} \, dx$

$= \int_0^1 \frac{1}{(x+2)^2} \, dx = \left[\frac{-1}{(x+2)} \right]_0^1 = \frac{-1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$