

INSA Toulouse, cycle préparatoire

Analyse 1 - Feuille TD #3

Calcul de primitives : intégrales simples et fractions rationnelles

Exercice 1 Un simple calcul d'aire pour s'échauffer.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0, 4]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} +1 & \text{pour } x \in]0, 1[\\ -2 & \text{pour } x \in]1, 2] \\ +4 & \text{pour } x \in]2, 4] \end{cases}$$

et : $f(-1) = 0$; $f(3) = 1$.

a) Calculer $\int_0^{+4} f(t) dt$.

b) Soit $F(x) = \int_0^x f(t) dt$. Calculer $F(x)$ pour $x \in]2, 4]$.

Une solution se trouve ici : <https://www.youtube.com/watch?v=UXp2ntGBZNE>

Exercice 2 Calcul de primitives

Calculer les intégrales suivantes :

1) $\int_{-1}^{+1} x\sqrt{1+x^2} dx$

2) $\int_1^e \ln(x) dx$

3) $\int_1^e (\ln(x))^2 dx$

Indice : IPP

4) $\int_0^{\pi/4} \tan^2 x dx$

Astuce. On écrit : $f(x) = \tan^2(x) - \dots + \dots$

$$5) \int_1^2 \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx.$$

Indice. Changement de variable.

$$6) \int_{1/e}^{1/e^e} \frac{1}{x \ln(x)} dx.$$

$$7) \int_{1/2}^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \arctan x dx.$$

Indice : Changement de variable $u = 1/x$. Aussi vous utiliserez à un moment du calcul la propriété : $\arctan(u) + \arctan(1/u) = \pi/2$.

$$8) \int_{1/2}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx.$$

Indice. Changement de variable : $x = \cos(t)$.

Exercice 3 Calcul de primitives

Soient :

$$I = \int_a^b \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx \text{ et } J = \int_a^b \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx$$

avec a et b deux réels, $a < b$.

a) Calculer $I + J$.

b) Calculer $I - J$.

(Indice : effectuer le changement de variable $t = \sin x + \cos x$).

c) En déduire les valeurs de I et J .

Exercice 4 Primitives de fractions rationnelles

Calculer les primitives suivantes :

a) $\int \frac{1}{(1+x^2)^2} dx$

Indice : chgt de variable $x = \tan(t)$

b) $\int \frac{x+2}{x^2-3x-4} dx$

c) $\int \frac{3x+1}{(x+1)^2} dx$

* Pour aller plus loin (hors programme) *

Exercice 5 Primitives de fractions rationnelles trigonometriques

Calculer les primitives ou intégrales suivantes :

a) $\int \frac{1}{\sin(x)} dx$
Règle de Bioche...

b) $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(t)}{\sin^2(t) + 4\sin(t) + 4} dt$
Règle de Bioche...