

INSA Toulouse, cycle préparatoire

## Analyse 1 - Feuille TD #3

*Calcul de primitives : intégrales simples et fractions rationnelles*

**Exercice 1** Un simple calcul d'aire pour s'échauffer.

Soit  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $[0, 4]$  par :

$$f(x) = \begin{cases} +1 & \text{pour } x \in ]0, 1[ \\ -2 & \text{pour } x \in ]1, 2] \\ +4 & \text{pour } x \in ]2, 4] \end{cases}$$

et :  $f(-1) = 0$ ;  $f(3) = 1$ .

a) Calculer  $\int_0^{+4} f(t) dt$ .

b) Soit  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ . Calculer  $F(x)$  pour  $x \in ]2, 4]$ .

*Une solution se trouve ici : <https://www.youtube.com/watch?v=UXp2ntGBZNE>*

### Exercice 2 Calcul de primitives

Calculer les intégrales suivantes :

1)  $\int_{-1}^{+1} x\sqrt{1+x^2} dx$

2)  $\int_1^e \ln(x) dx$

3)  $\int_1^e (\ln(x))^2 dx$

*Indice : IPP*

4)  $\int_0^{\pi/4} \tan^2 x dx$

*Astuce. On écrit :  $f(x) = \tan^2(x) - \dots + \dots$*

$$5) \int_1^2 \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx.$$

*Indice. Changement de variable.*

$$6) \int_{1/e}^{1/e^e} \frac{1}{x \ln(x)} dx.$$

$$7) \int_{1/2}^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \arctan x dx.$$

*Indice : Changement de variable  $u = 1/x$ . Aussi vous utiliserez à un moment du calcul la propriété :  $\arctan(u) + \arctan(1/u) = \pi/2$ .*

$$8) \int_{1/2}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx.$$

*Indice. Changement de variable :  $x = \cos(t)$ .*

### Exercice 3 Calcul de primitives

Soient :

$$I = \int_a^b \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx \text{ et } J = \int_a^b \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx$$

avec  $a$  et  $b$  deux réels,  $a < b$ .

a) Calculer  $I + J$ .

b) Calculer  $I - J$ .

(Indice : effectuer le changement de variable  $t = \sin x + \cos x$ ).

c) En déduire les valeurs de  $I$  et  $J$ .

#### Exercice 4 Primitives de fractions rationnelles

Calculer les primitives suivantes :

a)  $\int \frac{1}{(1+x^2)^2} dx$

*Indice : chgt de variable  $x = \tan(t)$*

b)  $\int \frac{x+2}{x^2-3x-4} dx$

c)  $\int \frac{3x+1}{(x+1)^2} dx$

\* Pour aller plus loin (hors programme) \*

### Exercice 5 Primitives de fractions rationnelles trigonometriques

Calculer les primitives ou intégrales suivantes :

a)  $\int \frac{1}{\sin(x)} dx$   
*Règle de Bioche...*

b)  $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(t)}{\sin^2(t) + 4\sin(t) + 4} dt$   
*Règle de Bioche...*