

INSA Toulouse, cycle préparatoire

Analyse 1 - Feuille TD #2

Développements limités, branches infinies, développements asymptotiques

Exercice 1 Développements Limités (DL)

A) Retrouver par vous-mêmes :

- a) les DL usuels du cours.
- b) le DL de $\tanh(x)$ en 0 à l'ordre 3.

B) Ecrire un DL de Taylor au point indiqué, à l'ordre p des fonctions suivantes :

- a) ordre 2 en 0, $f(x) = \exp(\cos(x))$.

Corrige : cf poly. de cours.

- b) ordre 2 en 0, $f(x) = \frac{x}{\sin(x)}$.

- c) ordre 2 en 0, $f(x) = (1 + \sin(x))^x$.

Indice. Commencez par écrire classiquement la puissance ainsi : $y^x = \exp(x \ln(y))$ puis ...

- d) ordre 3 en 0, $\frac{1}{\cos x}$.

- e) ordre 3 en 1, $f(x) = \sqrt{x}$.

- f) ordre 3 en 0, $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{(1+x)^2}$.

- g) ordre 2 en $\frac{\pi}{2}$, $f(x) = (\sin(x))^x$.

Indice. Commencez comme précédemment (ré-écriture de la puissance) puis changement de variable : $y = (x - \pi/2)$...

Exercice 2 Branches infinies de fonctions

Etudier le comportement des fonctions suivantes en $+$ ou $-\infty$ (selon l'indication donnée) :

a) en $+\infty$, $f(x) = \frac{x+1}{1 + \exp(\frac{1}{x})}$.

b) en $+\infty$, $f(x) = x + x \tanh(\frac{x}{x^2+1})$.

Indice : on utilisera le DL₃ en 0 de $\tanh(x)$...

c) en $+\infty$, $f(t) = (1+t) \arctan(1 + \frac{2}{t})$.

Exercice 3 Développements Asymptotiques (DA)

Ecrire les développements asymptotiques des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \cotan(x) = (\tan(x))^{-1}$ en 0, à la précision x^3 .

b) $f(x) = (\frac{1}{\ln(1+x)})^2$ en 0, à la précision x .

c) $f(x) = x \ln(x+1) - (x+1) \ln(x)$ en $+\infty$, à la précision $\frac{1}{x^2}$.

(Indice : On commencera par utiliser la propriété $\ln(x+1) = \ln(x(1+1/x))$).

d) $f(x) = \exp(1/x) - \exp(1/(x-1))$ à la précision $\frac{1}{x^2}$ en $+\infty$, la précision

$\frac{1}{x^2}$.

En déduire la valeur de $\lim_{+\infty} [x^2 f(x)]$.