Module 1
Problème
Solution

I) 1) a) En utilisant un résultat d'algèbre euclidienne, qui n'a pas été abordée dans ce module, on répondrait que la matrice est symétrique réelle, donc est diagonalisable.

On va appliquer la méthode générale et calculer le polynôme caractéristique :

$$P_A(\lambda) = det(\lambda I_2 - A) = det \begin{pmatrix} \lambda - 2 & 1 \\ 1 & \lambda - 2 \end{pmatrix}$$

$$= (\lambda - 2)^2 - 1$$

$$= (\lambda - 1)(\lambda - 3)$$

On en déduit que le spectre de A est égal à $\{1, 3\}$.

La matrice A est carrée d'ordre 2 et a deux valeurs propres distinctes, donc elle est diagonalisable. 1) b) Soient M et N deux éléments de $M_2(\mathbb{R})$ et (α, β) un couple de nombres réels.

$$\phi_A(\alpha M + \beta N) = A(\alpha M + \beta N) - (\alpha M + \beta N)A$$

$$= \alpha AM + \beta AN - \alpha MA - \beta NA$$

$$= \alpha(AM - MA) + \beta(AN - NA)$$

$$= \alpha \phi_A(M) + \beta \phi_A(N)$$

donc ϕ_A est linéaire, l'énoncé dit que c'est une application de $M_2(\mathbb{R})$ dans lui-même, c'est donc un endomorphisme de $M_2(\mathbb{R})$. 2) Calculons les images par ϕ_A des éléments de la base B.

$$\phi_A(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\phi_A(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\phi_A(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\phi_A(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice de l'endomorphisme ϕ_A dans la base B est donc :

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = M$$

3) a) Déterminons le polynôme caractéristique de l'endomorphisme ϕ_A .

$$P_{\phi_A}(\lambda) = det(\lambda I_4 - M) = det \begin{pmatrix} \lambda & 1 & -1 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & -1 \\ -1 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & -1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

On ajoute toutes les colonnes à la première, on obtient :

$$P_{\phi_A}(\lambda) = det \begin{pmatrix} \lambda & 1 & -1 & 0 \\ \lambda & \lambda & 0 & -1 \\ \lambda & 0 & \lambda & 1 \\ \lambda & -1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$= \lambda det \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & -1 \\ 1 & 0 & \lambda & 1 \\ 1 & -1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

En retranchant la première ligne à chacune des autres, on arrive à :

$$P_{\phi_A}(\lambda) = \lambda det \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & \lambda + 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & \lambda \end{pmatrix}$$

En développant le déterminant par rapport à la première colonne, on arrive à :

$$P_{\phi_A}(\lambda) = \lambda det \begin{pmatrix} \lambda - 1 & 1 & -1 \\ -1 & \lambda + 1 & 1 \\ -2 & 2 & \lambda \end{pmatrix}$$

En ajoutant la deuxième colonne à la première, on a :

$$P_{\phi_A}(\lambda) = \lambda det \begin{pmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ \lambda & \lambda + 1 & 1 \\ 0 & 2 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$= \lambda^2 det \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & \lambda + 1 & 1 \\ 0 & 2 & \lambda \end{pmatrix}$$

En retranchant la première ligne à la deuxième, on obtient :

$$P_{\phi_A}(\lambda) = \lambda^2 det \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & \lambda & 2 \\ 0 & 2 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$= \lambda^2(\lambda^2 - 4)$$

$$= \lambda^2(\lambda - 2)(\lambda + 2)$$

3) b) Le spectre de ϕ_A est donc : $\{-2, 0, 2\}$.

Les valeurs propres -2 et 2 sont simples et la valeur propre 0 est double, donc ϕ_A est diagonalisable si et seulement si le sous-espace propre associé à la valeur propre 0, qui est aussi le noyau de ϕ_A, est de dimension 2.

Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ un élément de $M_{(4,1)}(\mathbb{R})$.

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

est équivalent à :

$$-y + z = 0$$

$$-x + t = 0$$

$$x - t = 0$$

$$y - z = 0$$

Les équations sont opposées deux à deux, donc le vecteur de $M_2(\mathbb{R})$ de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ dans la base B appartient au noyau de ϕ_A si et seulement si : $x = t$ et $y = z$.

Les éléments du noyau de ϕ_A ont donc des coordonnées dans la base B de la forme:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ y \\ x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le noyau de ϕ_A est donc le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ qui sont linéairement indépendants, par exemple le déterminant extrait formé des deux premières lignes est non nul.

Il en résulte que le sous-espace propre associé à la valeur propre 0 est de dimension 2, donc la dimension des sous-espaces propres est égale à l'ordre de multiplicité des valeurs propres, ce qui entraîne que l'endomorphisme ϕ_A est diagonalisable. 4) En regardant bien, on constate que les valeurs propres de ϕ_A sont les différences des valeurs propres de A, de toutes les façons possibles, multiplicités comprises. Pour être plus clair : Le spectre de A est $\{1, 3\}$, les valeurs propres de ϕ_A sont :

$$1 - 1, 3 - 3, 1 - 3, 3 - 1$$

et on retrouve le spectre de ϕ_A , ordre de multiplicité des valeurs propres compris. II) 1) On a :

$$\phi_B(PE_{ij}P^{-1}) = BPE_{ij}P^{-1} - PE_{ij}P^{-1}B$$

Désignons par D la matrice $diag(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$.

On a $D = P^{-1}BP$, d'où $B = PDP^{-1}$, et donc :

$$\phi_B(PE_{ij}P^{-1}) = PDP^{-1}PE_{ij}P^{-1} - PE_{ij}P^{-1}PDP^{-1}$$

$$= PDE_{ij}P^{-1} - PE_{ij}DP^{-1}$$

$$= P\lambda_i E_{ij}P^{-1} - P\lambda_j E_{ij}P^{-1}$$

$$= (\lambda_i - \lambda_j)PE_{ij}P^{-1}$$

On en déduit que $PE_{ij}P^{-1}$ est un vecteur propre de ϕ_B associé à la valeur propre $\lambda_i - \lambda_j$. 2) Comme il y a n^2 matrices E_{ij} , il y a n^2 matrices $PE_{ij}P^{-1}$: en effet P et P^{-1} sont inversibles, donc : $PE_{ij}P^{-1} = PE_{i'j'}P^{-1}$ entraîne $E_{ij} = E_{i'j'}$.

On va démontrer que, de plus, la famille $(PE_{ij}P^{-1})_{1 \leq i,j \leq n}$ est libre.

Soit $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} PE_{ij}P^{-1}$ une combinaison linéaire nulle de la famille.

En multipliant l'égalité à gauche par P^{-1} et à droite par P, on en déduit $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} E_{ij} = 0$, ce qui est une combinaison linéaire de la famille $(E_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ et cette famille est libre puisque, quand on la munit d'un ordre, c'est une base de $M_n(\mathbb{R})$.

Il en résulte donc que les coefficients α_{ij} sont tous nuls, donc $(PE_{ij}P^{-1})_{1 \leq i,j \leq n}$ est une famille libre de n^2 vecteurs de $M_n(\mathbb{R})$, donc, quand on la munit d'un ordre, c'est une base de $M_n(\mathbb{R})$.

Il existe une base de $M_n(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de l'endomorphisme ϕ_B , donc ϕ_B est diagonalisable.