Corrigé TD M1S4 : Autour de la diagonalisation

Corrigé exercice 1

1. Le polynôme caractéristique :
   Ici nous obtenons $\chi_B(\lambda) = \lambda^2 + 1 = (\lambda - i)(\lambda + i)$ Nous avons donc deux valeurs propres $\lambda_1 = i$ et $\lambda_2 = -i$. Le polynôme caractéristique est scindé à racines simples donc A est diagonalisable.
2. Le sous espace propre associé λ_1 :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in SEP(B,i) \Leftrightarrow B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = i\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in SEP(B,i) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} ix + 4iy & = & ix \\ -iy & = & iy \end{array} \right.$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in SEP(B,i) \Leftrightarrow y = 0$$

$$SEP(B,i) = Vect(1,0)$$

3. Le sous espace propre associé à λ_2

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in SEP(B,i) \Leftrightarrow y = 0$$

$$SEP(B,i) = Vect(1,0) \in SEP(B,-i) \Leftrightarrow B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -i\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in SEP(B,-i) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} ix + 4iy & = & -ix \\ -iy & = & -iy \end{array} \right.$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in SEP(B,-i) \Leftrightarrow y = \frac{-1}{2}x$$

$$SEP(B,-i) = Vect(1, \frac{-1}{2})$$

4. Conclusion
   Nous avons alors une base de vecteurs propres avec $V_1 = (1,0)$ et $V_2 = (1, \frac{-1}{2})$ et par suite la matrice de passage P s'exprime par :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$$

$$B = PDP^{-1} \quad \text{avec} \quad D = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

Corrigé exercice 2

Le polynôme caractéristique de A est $\lambda^2 - ab$.

1. Si $ab > 0$, alors il se factorise en $(\lambda - \sqrt{ab})(\lambda + \sqrt{ab})$. Autrement dit, A admet deux valeurs propres distinctes, et donc A est diagonalisable.
2. Si $ab = 0$,
   (a) alors si $a = b = 0$, A est déjà diagonale.
   (b) Si $a = 0$ et $b \neq 0$ (ou symétriquement si $b = 0$ et $a \neq 0$), la seule valeur propre de A est 0, et donc si A était diagonalisable, elle serait égale à la matrice nulle, ce qui n'est pas le cas. Donc A n'est pas diagonalisable.
3. Enfin, si $ab < 0$, A n'admet pas de valeurs propres, et donc A n'est pas diagonalisable.

En résumé, on a prouvé que A est diagonalisable si et seulement si $a = b = 0$ ou $ab > 0$.

Corrige exercice 3

VIDEO Corrigé Exercice 3 M1S4

1. Le polynôme caractéristique de A :

$$\chi_A(\lambda) = det \begin{pmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{pmatrix}$$

En développant suivant la première colonne nous obtenons

$$\chi_A(\lambda) = \lambda det \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix} + det \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix} - det \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ \lambda & -1 \end{pmatrix}$$

Ainsi

$$\chi_A(\lambda) = \lambda(\lambda^2 - 1) - \lambda - 1 - (1 + \lambda) = \lambda^3 - 3\lambda - 2$$

-1 est solution évidente de polynôme caractéristique, ainsi par factorisation nous obtenons :

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda + 1)^2)(\lambda - 2)$$

.

Nous avons donc deux valeurs propres $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = 2$, déterminons les sous espaces propres associés.

2. Sous espace propre associé à λ_1 :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in SEP(A, -1) \Leftrightarrow A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (-1) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in SEP(A, -1) \Leftrightarrow \begin{cases} y + z = -x \\ x + z = -y \\ x + y = -z \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in SEP(A, -1) \Leftrightarrow \{ \ x + y + z = 0$$

Il s'agit donc d'un plan vectoriel :

$$SEP(A, -1) = Vect((1, -1, 0), (0, 1, -1))$$

3. <u>De même pour le sous espace propre associé à λ_2 :</u>

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in SEP(A,2) \Leftrightarrow A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in SEP(A,2) \Leftrightarrow \begin{cases} y+z=2x \\ x+z=2y \\ x+y=2z \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in SEP(A,2) \Leftrightarrow \begin{cases} y=x \\ z=y \end{cases}$$

$$SEP(A,2) = Vect(1,1,1)$$

4. <u>Conclusion :</u>
A est donc diagonalisable car son polynôme caractéristique est scindé et $dim(SEP(A,-1) = 2$ or -1 est racine double de χ_A et $dim(SEP(A,2) = 1$ et 2 est racine simple de χ_A.
Ainsi
$$A = PDP^{-1}$$
avec
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Corrigé exercice 4

1. (a) <u>Le polynôme caractéristique</u>

$$\chi_A(\lambda) = det \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ -2 & \lambda-1 \end{pmatrix}$$

$$\chi_A(\lambda) = \lambda(\lambda-1) - 2 = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda+1)(\lambda-2)$$

.
χ_A admet donc deux racines simples $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = 2$. Comme le polynôme caractéristique est scindé à racines simples nous pouvons donc en conclure que la matrice A est diagonalisable.

(b) <u>Le sous espace propre associé à λ_1</u>

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in SEP(A,-1) \Leftrightarrow A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in SEP(A,-1) \Leftrightarrow \begin{cases} 0x+y &= -x \\ 2x+y &= -y \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in SEP(A,-1) \Leftrightarrow y = -x$$

$$SEP(A,-1) = Vect(1,-1)$$

(c) Le sous espace propre associé à λ_2

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in SEP(A,2) \Leftrightarrow A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in SEP(A,2) \Leftrightarrow \begin{cases} 0x + y &= 2x \\ 2x + y &= 2y \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in SEP(A,2) \Leftrightarrow y = 2x$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in SEP(A,2) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2x \end{pmatrix})$$

$$SEP(A,2) = Vect(1,2)$$

(d) Conclusion

Nous avons alors une base de vecteurs propres avec $V_1 = (1,-1)$ et $V_2 = (1,2)$ par suite la matrice de passage P s'exprime par :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = PDP^{-1} \quad \text{avec} \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Note : nous avons d'abord inscrit sur la diagonale de D la valeur propre -1 car la base de vecteurs propres commence avec un vecteur propre associé à cette valeur propre.

2.

$$A\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ 2u_n + u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$$

Par une récurrence immédiate, nous en déduisons que

$$\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}$$

Or de l'écriture $A = PDP^{-1}$ nous obtenons que :

$$A^n = PD^nP^{-1}$$

Ainsi

$$\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ & 2^n \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}$$

Or

$$P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi par calcul matriciel,

$$u_n = \frac{1}{3}[(-1)^n(2u_0 - u_1) + 2^n(u_0 + u_1)]$$

corrige exercice 5

1. (a) Le polynôme caractéristique :

$$\chi_A(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ -1 & \lambda-2 & 3 \\ -1 & -1 & \lambda+2 \end{pmatrix}$$

En développant suivant la première colonne nous obtenons

$$\chi_A(\lambda) = \lambda det\begin{pmatrix} \lambda-2 & 3 \\ -1 & \lambda+2 \end{pmatrix} + det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & \lambda+2 \end{pmatrix} - det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \lambda-2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\chi_A(\lambda) = \lambda(\lambda^2-1) + (\lambda+1) - (\lambda+1)$$

$$\chi_A(\lambda) = \lambda(\lambda-1)(\lambda+1)$$

A admet trois valeurs propres distinctes dans un espace de dimension 3 donc A est diagonalisable. Posons $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ et $\lambda_3 = -1$.

(b) Le sous espace propre associé à la valeur propre λ_1

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in SEP(A,0) \Leftrightarrow A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in SEP(A,0) \Leftrightarrow \begin{cases} -y+z=0 \\ x+2y-3z=0 \\ x+y-2z=0) \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in SEP(A,0) \Leftrightarrow \begin{cases} y=z \\ x-y=0 \\ x-y=0) \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in SEP(A,0) \Leftrightarrow X = (x,x,x), x \in \mathbb{R}$$

$$SEP(A,0) = Vect(1,1,1)$$

(c) Le sous espace propre associé à la valeur propre λ_2

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in SEP(A,1) \Leftrightarrow A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in SEP(A,1) \Leftrightarrow \begin{cases} -y+z=x(1) \\ x+2y-3z=y(2) \\ x+y-2z=z(3) \end{cases}$$

Les equations (2) et (3) sont les mêmes, puis en ajoutant (1) et (2) nous avons

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in SEP(A,1) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -x-y+z=0 \\ z=0 \\ y=-x \end{array} \right.$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in SEP(A,1) \Leftrightarrow, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -x \\ 0 \end{pmatrix} x \in \mathbb{R}$$

$$SEP(A,1) = Vect(1,-1,0)$$

(d) Le sous espace propre associé à la valeur propre λ_3

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in SEP(A,-1) \Leftrightarrow A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in SEP(A,-1) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x-y+z=0 \\ x+3y-3z=0 \\ x+y-z=0 \end{array} \right.$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in SEP(A,-1) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x=0 \\ y=z \end{array} \right.$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in SEP(A,-1) \Leftrightarrow, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ y \end{pmatrix} y \in \mathbb{R}$$

$$SEP(A,1) = Vect(0,1,1)$$

(e) Conclusion

$$A = PDP^{-1}$$

avec

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2.

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1'(t) = 0 \\ y_2'(t) = y_2(t) \\ y_3'(t) = -y_3(t) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y_1(t) = A \\ y_2(t) = Be^t \\ y_3(t) = Ce^{-t} \end{array} \right.$$

avec A, B, C trois réels.

3. Le système(S) proposé est équivalent à

$$(S) \Leftrightarrow X' = AX = PDP^{-1}X$$
$$(S) \Leftrightarrow P^{-1}X' = DP^{-1}X$$

En posant $Y = P^{-1}X$,

$$(S) \Leftrightarrow Y' = DY$$

Or ce système a été résolu à la question précédente, ainsi comme $X = PY$ nous obtenons par calcul matriciel :

$$\begin{cases} x_1(t) = -y_1(t) + y_2(t) = A + Be^t \\ x_2(t) = -y_1(t) - y_2(t) + y_3(t) = A - Be^t + Ce^{-t} \\ x_3(t) = y_1(t) + y_3(t) = A + Ce^{-t} \end{cases}$$