TD M1S4 : Autour de la diagonalisation

Exercice 1. Diagonaliser dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ la matrice $B = \begin{pmatrix} i & 4i \\ 0 & -i \end{pmatrix}$

Exercice 2. Considérons $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ donner une condition nécessaire et suffisante pour que A soit diagonalisable.

Exercice 3. Diagonaliser dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 4.

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, diagonaliser A et en déduire A^n $\forall n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que la relation $u_{n+2} = 2u_n + u_{n+1}$ peut se mettre sous la forme :

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$$

   En déduire l'expression de u_n en fonction de n, u_0, u_1.

Exercice 5.
Soit ϕ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

1. Diagonaliser A.
2. Résoudre le système différentiel :

$$\begin{cases} y_1'(t) = 0 \\ y_2'(t) = -y_2(t) \\ y_3'(t) = -y_3(t) \end{cases}$$

3. En déduire la résolution du système suivant :

$$\begin{cases} x_1'(t) = -x_2(t) + x_3(t) \\ x_2'(t) = -x_1(t) + 2x_2(t) - 3x_3(t) \\ x_3'(t) = x_1(t) + x_2(t) - 2x_3(t) \end{cases}$$