TD M1S3 : Autour de la diagonalisation

Exercice 1. Endomorphismes qui commutent
Soient f et g deux endomorphismes d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie. On suppose que f et g commutent.

1. Justifier pourquoi f admet au moins un vecteur propre.
2. Prouver que le sous espace propre associé est stable par g.
3. En considérant la restriction de g à ce sous-espace propre, en déduire que f et g ont un vecteur propre commun.

Exercice 2. Endomorphismes qui commutent bis
Soient f, g deux endomorphismes du $\mathbb{K}$ espace vectoriel E de dimension finie tels que f est diagonalisable. Démontrer que f et g commutent si et seulement si les sous-espaces propres de f sont stables par g.

Exercice 3. Endomorphisme nilpotent et diagonalisable
Soit f un endomorphisme du $\mathbb{K}$ espace vectoriel E de dimension finie tel que f soit diagonalisable et nilpotent. Établir que f est nul.

Exercice 4. Diagonalisation et sous espace stable
Soit f un endomorphisme du $\mathbb{K}$ espace vectoriel E de dimension finie. On s'intéresse aux propriétés suivantes :

i) f est diagonalisable

ii) tout sous-espace vectoriel de E stable par f admet au moins un supplémentaire stable par f.

1. Dans cette question nous supposons que E est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel. considérons pour E le plan euclidien et pour f la rotation d'angle $\pi/2$.
   (a) Justifier que les seuls sous-espaces stables par f sont $\{0_E\}$ et E
   (b) en déduire que ii) n'implique pas i).
2. Dans cette question nous supposons que E est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel, démontrer que que i) implique ii).
3. Dans cette question nous supposons que E est un $\mathbb{C}$ espace vectoriel
   (a) Justifier que i) implique ii).
   (b) Pour montrer que ii) implique i) raisonnez par l'absurde et considérez le sous espace vectoriel $F = \bigoplus_{\lambda \in Sp(f)} Ker(f - \lambda Id_E)$.

Dr. Stéphanie REGLADE - Agrégée de mathématiques
INSA Centre Val de Loire