Corrigé TD M1S1

Corrigé exercice 1 : Vecteur propre

VIDEO : Corrigé Exercice 1

Nous cherchons $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ tels qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ satisfaisant $MX = \lambda X$ avec $X = (1, 2, 3)$ ce qui nous amène au système :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x + 2 + 3 & = & \lambda \\ 1 + 2y + 3 & = & 2\lambda \\ 1 + 2 + 3 & = & 3\lambda \end{array} \right.$$

On déduit de la troisième équation $\lambda = 2$, puis de la deuxième $y = 0$ et enfin de la première $x = -3$. Il y a donc une unique solution $(-3, 0)$.

Corrigé exercice 2 : Elements propres
Soit $f \in E$, f est vecteur propre de u pour la valeur propre λ si et seulement si

$$(f \neq 0 \quad \text{et} \quad u(f) = \lambda f = f'[1])$$

$$[1] \Leftrightarrow (f \neq 0 \quad \text{et} \quad f' - \lambda f = 0)$$

Nous devons donc résoudre une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants.

$$[1] \Leftrightarrow (f \neq 0 \quad \text{et} \quad \exists K \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = Ke^{\lambda x})$$

.

$$[1] \Leftrightarrow (\exists K \in \mathbb{R}^* \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = Ke^{\lambda x})$$

.

$$SEP(u, \lambda) = Vect(f_\lambda)$$

avec $\forall x \in \mathbb{R} \quad f_\lambda(x) = Ke^{\lambda x} \quad K \in \mathbb{R}$.

Corrigé exercice 3 : Valeurs propres
Soit $\lambda \in Sp(u)$ alors $\exists Y \in E \quad Y \neq 0_E \quad u(Y) = \lambda Y \Rightarrow AY = \lambda Y[*]$
en notant $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ les colonnes de Y, comme $Y \neq 0_n$ l'une de ces colonnes n'est pas nulle notons là Y_j. De part l'égalité $[*]$, nous en déduisons $AY_j = \lambda Y_j$ donc $\lambda \in Sp(A)$. Ainsi

$$Sp(u) \subset Sp(A).$$

Réciproquement soit $\lambda \in Sp(A)$ alors $\exists X \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R}) \quad X \neq 0_E \quad AX = \lambda X$. Considérons alors Y la matrice de E dont toutes les colonnes sont égales à X. $Y = [X, X, ..., X]$ est non nul car X est non nul. De plus $AY = [AX, AX, ..., AX] = \lambda Y$. Ainsi

$$Sp(A) \subset Sp(u).$$

Donc

$$Sp(u) = Sp(A).$$

Corrigé exercice 4 : Endomorphismes nilpotents

Supposons que $f \in \mathcal{L}(E)$ soit un endomorphisme nilpotent : $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $f^n = 0$, Soit λ une valeur propre de f et x un vecteur propre associé. De la relation $f(x) = \lambda x$ nous obtenons par une récurrence immédiate $f^n(x) = \lambda^n x$. Comme par hypothèse f^n est l'endomorphisme nul et comme $x \neq O_E$ nous en déduisons $\lambda = 0$. Ainsi $Sp_{\mathbb{C}}(f) \subset \{0\}$.

D'autre part la relation $f^n = 0$ implique $det(f^n) = 0$ donc $det(f) = 0$. Par suite f est un endomorphisme non inversible donc $Ker(f) \neq \emptyset$. Ainsi 0 est valeur propre de f. Donc $Sp_{\mathbb{C}}(f) = \{0\}$.

Corrigé exercice 5 : Sous espaces stables

Notons $SEP(f, \lambda)$ un sous espace propre de f pour la valeur propre λ, soit $x \in SEP(f, \lambda)$ alors $f(x) = \lambda x$, ainsi $g(f(x)) = \lambda g(x)$ car $g \in \mathcal{L}(E)$. Or par l'hypothèse $g \circ f = f \circ g$ ainsi $f(g(x)) = g(f(x)) = \lambda g(x)$ à savoir $g(x) \in SEP(f, \lambda)$.

$$\forall x \in SEP(f, \lambda), g(x) \in SEP(f, \lambda).$$

Le sous espace propre $SEP(f, \lambda)$ de f pour la valeur propre λ est donc stable par g.